

# Spiegelbild des Auges durch eine Linse betrachtet

## 1. Aufgabe

Das eigene Auge soll durch eine Anordnung von Sammellinse mit dahinter befindlichem ebenem Spiegel betrachtet werden. Herauszufinden ist, unter welchen Bedingungen im Spiegel ein Bild des Auges sichtbar wird. Das Bild sollte vergrößert sein, es darf aufrecht stehen oder umgekehrt sein. Die Frage ist auch, wo das Bild entsteht und wie groß es ist.

Um das experimentell zu klären, benötigt man nur ein paar Linsen und den Spiegel, vielleicht auch eine optische Bank, auf der man diese geeignet verschieben kann. Der Aufwand ist nicht groß und verleitet zum wilden Probieren. Dabei geht schnell der Überblick verloren. Also muss zunächst etwas Theorie her.

## 2. Theorie

### 2.1 Strahlenoptik, Ort und Größe des Bildes

Im Unterschied zur normalen Benutzung einer Sammellinse, z. B. als Lupe, befindet sich unser Gegenstand *vor* der Linse (und selbstverständlich vor dem Spiegel). Der Gegenstand, das Auge, wird hinter der Linse gespiegelt und erst nach erneutem Durchgang durch die Linse betrachtet. Zur Konstruktion und Berechnung des Strahlengangs kommen also Linsenformel und Reflexionsgesetz zur Anwendung.

Einen möglichen Strahlengang durch die Linse-Spiegel-Kombination zeigt Abbildung 1. Das Auge, unser Gegenstand, wird als senkrechter Pfeil dargestellt, der sich im Abstand  $g$  (Gegenstandsweite) vor der Linse befindet. Seine Spitze habe die Höhe  $G$  (Gegenstandsgröße). Die Brennweite der Linse bezeichnen wir wie üblich mit  $f$  und der Abstand des Spiegels von der Linse werde  $x$  genannt.

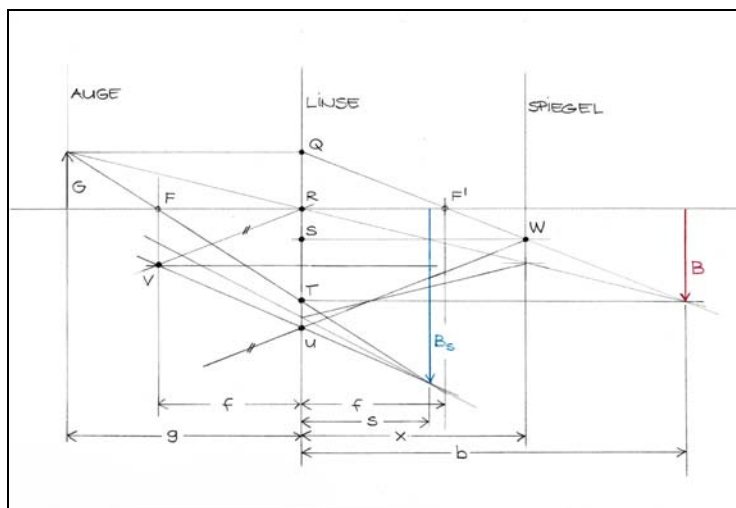


Abbildung 1 Ein Auge, hier als Pfeil (Gegenstand  $G$ ) dargestellt, betrachtet sich selbst in einem Spiegel, vor dem sich eine Sammellinse befindet. Das Spiegelbild  $B_s$  (blau), konstruiert nach den Gesetzen der Strahlenoptik, ist virtuell und umgekehrt. Ohne Spiegel würde das Bild  $B$  (rot) entstehen – da  $g/f > 1$ , ist es reell und umgekehrt. Die Punkte  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $V$  und  $W$  werden bei der Herleitung der Formeln für den Bildabstand  $s$  und die Bildgröße  $B_s$  benutzt, siehe Text.

Zur Konstruktion des Bildpunktes der Pfeilspitze benutzen wir die drei Standard-Strahlen *Parallel-, Brennpunkt-* und *Mittelpunktstrahl*. Bei der Reflexion am Spiegel wird das Gesetz *Reflexionswinkel gleich Einfallswinkel* beachtet. Unsere Konstruktion ergibt für die gewählten Werte von  $g$  und  $x$  ein *virtuelles*, umgekehrtes Bild der Höhe  $B_S$ , und zwar im Abstand  $s$  *hinter* der Linse (blauer Pfeil). In die Abbildung eingezeichnet wurde auch das Bild  $B$ , das hinter der Linse entstehen würde, wenn wir den Spiegel entfernen. Es ist wegen  $g/f > 1$  *reell*. Sein Abstand von der Linse werde  $b$  (Bildweite) genannt. Für Bildweite  $b$  und Bildgröße  $B$  gelten die üblichen Gesetze der Strahlenoptik. Da  $B_S$  mit  $B$  verknüpft ist, gehen Bildweite und Bildgröße in die Rechnung ein.

Für  $b$  und  $B$  gelten Linsenformel (es wird eine dünne, symmetrische Sammellinse vorausgesetzt)

$$(1) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

und Abbildungsgesetz

$$(2) \quad \frac{B}{G} = \frac{b}{g}.$$

Aus der Linsenformel folgt

$$b = \frac{fg}{g - f}.$$

Das, eingesetzt in die Abbildungsgleichung (2), ergibt

$$(3) \quad B = G \frac{1}{\frac{g}{f} - 1}$$

Die Verknüpfung der Größen  $s$  und  $B_S$  mit  $g, f, G$  und  $B$  und dem Abstand  $x$  des Spiegels von der Linse stellen die nachfolgenden Gleichungen her. Zur besseren Übersicht sind dazu in der Abbildung die Punkte  $Q, R, S, T, U, V$  und  $W$  markiert. Dabei ist

$$\overline{QR} = G, \quad \overline{RT} = B,$$

und aus dem Reflexionsgesetz folgt

$$\overline{QS} = \overline{SU}.$$

Bei der Herleitung machen wir von der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke Gebrauch. Die Dreiecke, die der Brennpunktstrahl durch die Spitze von  $G$  erzeugt, ergeben

$$\frac{\overline{B_S}}{\overline{RT}} = \frac{B_S}{B} = \frac{s + f}{f} = \frac{s}{f} + 1.$$

Mit Gl. (3) folgt daraus

$$(4) \quad \frac{B_S}{G} = \frac{\frac{s}{f} + 1}{\frac{g}{f} - 1}.$$

Das nächste Ziel ist es, den Quotienten  $B_S/G$  durch einen Term auszudrücken, der den Abstand  $x$  des Spiegels von der Linse enthält. Dazu betrachten wir den reflektierten Parallelstrahl, der auf der „Rückreise“ durch die Linse in die Richtung  $UV$  gebrochen wird. Aus der Strahlenoptik folgt, dass die Strahlen  $RV$  und  $WV$  parallel sind. Dadurch entstehen die ähnlichen Dreiecke  $FRV$  und  $SWU$ , aus denen man abliest

$$\frac{\overline{FV}}{\overline{SU}} = \frac{\overline{FV}}{\overline{QS}} = \frac{f}{x}, \quad \text{also} \quad \overline{FV} = \overline{QS} \frac{f}{x}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $QSW$  und  $QRF'$  folgt

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{QS}}{G} = \frac{x}{f}, \quad \text{also} \quad \overline{QS} = G \frac{x}{f}.$$

Damit wird

$$\overline{FV} = G.$$

Der Strahl  $VU$  erzeugt zusammen mit der zur Achse parallelen Geraden durch  $V$  Dreiecke, aus deren Ähnlichkeit folgt

$$(5) \quad \frac{B_s - \overline{FV}}{\overline{VU}} = \frac{s + f}{f} = \frac{s}{f} + 1.$$

Aus Abbildung 1 liest man ab

$$\overline{VU} = \overline{QU} - \overline{QR} - \overline{FV} = 2\overline{QS} - G - G = 2G\frac{x}{f} - 2G = 2G\left(\frac{x}{f} - 1\right).$$

Damit erhält man

$$\frac{B_s - G}{2G\left(\frac{x}{f} - 1\right)} = \frac{s}{f} + 1, \quad \text{also} \quad B_s - G = 2G\left(\frac{x}{f} - 1\right)\left(\frac{s}{f} + 1\right)$$

oder

$$\frac{B_s}{G} = 2\left(\frac{x}{f} - 1\right)\left(\frac{s}{f} + 1\right) + 1.$$

Ersetzen wir jetzt den Quotienten  $B_s/G$  durch den Term in Gl. (4), folgt

$$(6) \quad \frac{\frac{s}{f} + 1}{\frac{g}{f} - 1} = 2\left(\frac{s}{f} + 1\right)\left(\frac{x}{f} - 1\right) + 1.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir nach einiger Rechnung (Übungsaufgabe) für den Abstand  $s$  des Spiegelbildes von der Linse

$$(7) \quad \frac{s}{f} = \frac{1 - \left(1 - \frac{2x}{f}\right)\left(1 - \frac{g}{f}\right)}{2\left(1 - \frac{x}{f}\right)\left(1 - \frac{g}{f}\right) - 1}.$$

Die Größe des Bildes folgt aus Gl. (4), indem dort der Ausdruck für  $s/f$  eingesetzt wird. Das ergibt (wieder eine Übungsaufgabe)

$$(8) \quad \frac{B_s}{G} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{x}{f}\right)\left(1 - \frac{g}{f}\right) - 1}.$$

Ein positiver Wert von  $B_s/G$  entspricht einem umgekehrten, ein negativer Wert einem aufrechten Bild.

## 2.2 Gegenstandsweite und Abstand Spiegel/Linse

Gleichung (7) zeigt, dass  $s$  bei gegebener Brennweite  $f$  von der Gegenstandsweite  $g$  und dem Abstand  $x$  des Spiegels von der Linse abhängt. Das ist plausibel. Weniger einsichtig ist, dass die Formel auch dann gilt, wenn das Bild  $B$  auf derselben Seite wie der Gegenstand  $G$  liegt, die Bildweite  $b$  also negativ ist (Anhang A). Abbildung 2 zeigt das Beispiel eines Strahlengangs, bei dem dies der Fall ist. Man beachte, dass das Spiegelbild  $B_s$  dabei immer noch auf der anderen Seite der Linse liegt als der Gegenstand. Es ist wie in Abbildung 1 ein virtuelles Bild, im Gegensatz zu diesem aber aufrecht.

Für eine große Anzahl von  $g$ - und  $x$ -Werten ergibt Gl. (7) ein negatives  $s$ . Dieser Lösung entspricht ein Spiegelbild  $B_s$ , das auf *derselben* Seite liegt wie der Gegenstand. Es ist reell – ob aufrecht oder umgekehrt, hängt ab von den Werten des Paares  $(g, x)$ . Diese Bilder sollen *nicht* weiter betrachtet werden.

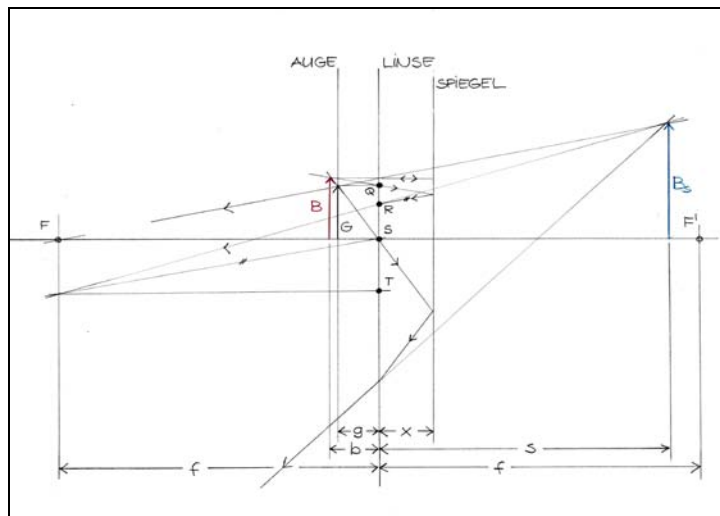


Abbildung 2 Strahlengang für den Fall  $g/f < 1$ . Das Spiegelbild  $B_s$  (blau) ist, wie in Abbildung 1, virtuell, steht aber aufrecht. Ohne Spiegel ergäbe sich das virtuelle Bild B (rot).

Abbildung 3 zeigt eine Karte der  $xg$ -Ebene mit den Gebieten gleichen Vorzeichens von  $s$ . Deren Grenzen werden gebildet einmal durch die Polstellen (Nullstellen des Nenners) von  $s/f$ , zum anderen durch die Nullstellen (des Zählers). Der Nenner wird Null für

$$(9) \quad \frac{g}{f} = \frac{1 - 2\frac{x}{f}}{2\left(1 - \frac{x}{f}\right)}$$

Die entsprechende Ortslinie ist die ausgezogene Kurve in der Abbildung. Sie besteht aus zwei

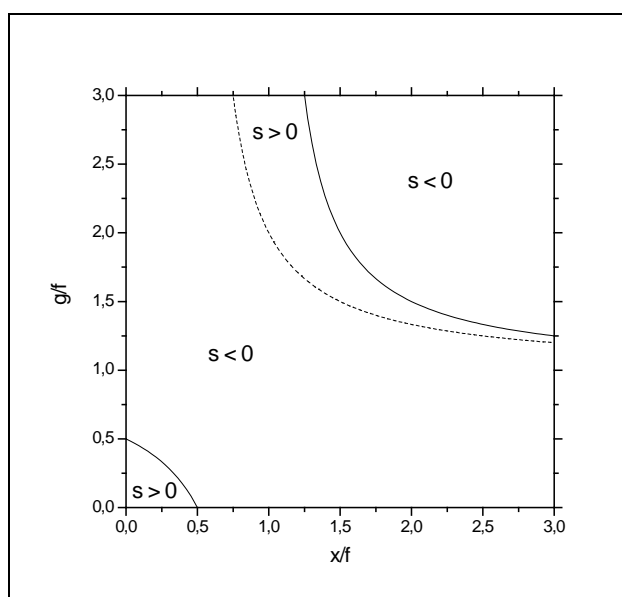


Abbildung 3 Gebiete gleichen Vorzeichens von  $s/f$ . Nur für  $s/f > 0$  entstehen virtuelle Bilder, die das Auge beim Blick durch die Linse sieht. Betrachtung mit entspanntem Auge ist für Wertepaare  $(x, g)$  entlang oder in der Nähe der ausgezogenen Kurve möglich. Siehe auch den Text in Abschnitt 2.3.

hyperbel-ähnlichen Ästen. Der Zähler von  $s/f$  wird Null für

$$(10) \quad \frac{g}{f} = \frac{2 \frac{x}{f}}{2 \frac{x}{f} - 1}.$$

Die zugehörige Ortskurve ist in der Abbildung gestrichelt gezeichnet. Eine 3D-Darstellung der  $s/f$ -„Landschaft“ zeigt Abbildung 4A. Das Landschaftsprofil entlang der Winkelhalbierenden  $g/f = x/f$  ist in Abbildung 4B dargestellt.

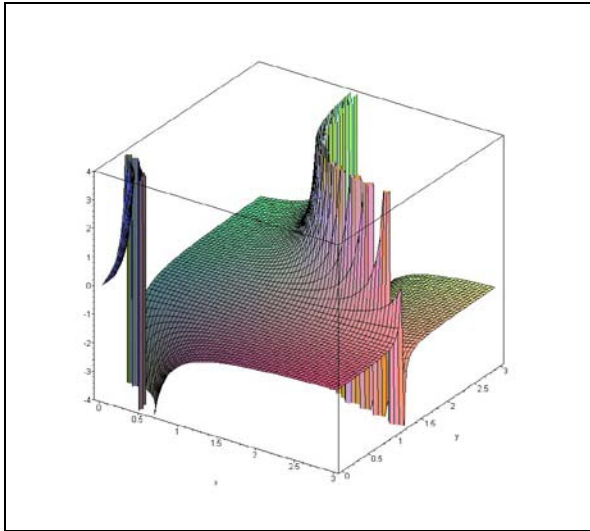


Abbildung 4A 3D-Ansicht des  $s/f$ -Gebirges

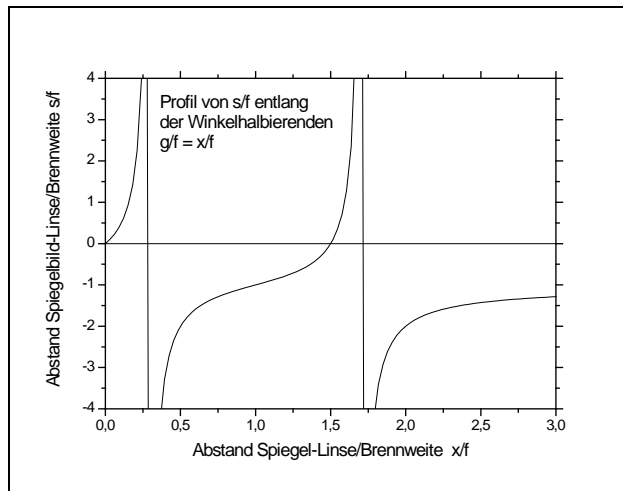


Abbildung 4B Profil des  $s/f$ -Gebirges entlang der Winkelhalbierenden  $g/f = x/f$

### 2.3 Beobachtung mit entspanntem Auge, Vergrößerung

Für  $s/f \rightarrow \infty$ , das heißt, bei Annäherung an die durch Gl. (9) gegebenen Kurven, wandert das Spiegelbild nach Unendlich. Dann sind die vom Bild  $B_S$  ausgehenden Sehstrahlen parallel. Das (normalsichtige) Auge kann sie *entspannt* auf der Netzhaut fokussieren, muss also nicht akkommodiert werden. Die weiter unten beschriebenen Messreihen wurden in dieser Beobachtungsart ausgeführt – auf oder zumindest in der Nähe der ausgezogenen Kurven in Abbildung 3.

Wir erwarten, dass für  $s/f \rightarrow \infty$  auch die Bildgröße  $B_S$  unendlich groß wird. Das zeigt sich, wenn wir den Term für  $g/f$  in Gl. (9) in die Gleichung für  $B_S$ , Gl. (8), einsetzen. Beobachten wir, wie beabsichtigt, im Gebiet positiver Werte von  $s/f$ , befindet sich das Bild immer noch hinter dem Spiegel. Es bleibt also *virtuell*.

Aus Gl. (9) lässt sich eine weitere Folgerung ableiten: Da die Gegenstandsweite nicht Null oder negativ werden kann, können wir generell fordern  $g/f > 0$ . Daraus ergeben sich die Bereiche von  $x$ , für die mit entspanntem Auge beobachtet werden kann. Wegen Gl. (9) ist  $g/f > 0$  äquivalent zu

$$\frac{1 - 2 \frac{x}{f}}{1 - \frac{x}{f}} > 0, \text{ also } \left[ 1 - 2 \frac{x}{f} > 0 \wedge 1 - \frac{x}{f} > 0 \right] \vee \left[ 1 - 2 \frac{x}{f} < 0 \wedge 1 - \frac{x}{f} < 0 \right].$$

Das vereinfacht sich zu

$$\left[ \frac{x}{f} < \frac{1}{2} \right] \vee \left[ \frac{x}{f} > 1 \right].$$

Die linke Klammer entspricht dem Kurvenast links unten in Abbildung 3, die rechte Klammer dem Ast rechts oben. Der Bereich positiver Werte von  $s/f$  (virtuelles Bild) liegt in beiden Fällen etwas *unterhalb* der Kurvenäste. Wir erwarten daher, dass ein virtuelles, mit entspanntem Auge beobachtbares Bild existiert, wenn auf der rechten Seite der Formel für  $g/f$  ein Bruchteil  $\varepsilon \ll 1$  subtrahiert wird:

$$\left( \frac{g}{f} \right)_{\text{virtuell, } \approx \infty} = \frac{1 - 2 \frac{x}{f}}{2 \left( 1 - \frac{x}{f} \right)} - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Setzen wir diesen gegenüber Gl. (9) modifizierten Term in Gl. (8) ein, erhalten wir

$$\left( \frac{B_s}{G} \right)_{\text{virtuell, } \approx \infty} = -\frac{1}{2\varepsilon \left( 1 - \frac{x}{f} \right)}.$$

Für den Bereich  $x/f < 1/2$  ist  $B_s$  damit negativ, für  $x/f > 1$  positiv. Positives  $B_s$  bedeutet nach unserer Vorzeichenfestlegung ein umgekehrtes Bild, negatives  $B_s$  ein aufrechtes Bild. Anhang B zeigt entsprechende Strahlengänge.

Die Vergrößerung  $V$  definiert man mit Hilfe der Sehwinkel, unter denen das Bild mit Linse und der Gegenstand ohne Linse erscheinen. Sei  $\varphi$  der Winkel mit Linse und  $\varphi_0$  der ohne Linse, so gilt

$$(11) \quad V = \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\varphi_0)}.$$

Für den Schwinkel  $\varphi$  mit Linse lesen wir aus Abbildung 1 (oder Abbildung 2) ab

$$\tan(\varphi) = \frac{B_s}{s + g} = \frac{G}{g} \frac{1 + \frac{s}{f}}{1 - \frac{g}{f}} \frac{1}{1 + \frac{s}{g}}.$$

Da wir mit entspanntem Auge beobachten wollen, sind die Gegenstandsweiten  $g$  nach Gl. (9) mit dem Abstand  $x$  des Spiegels von der Linse verknüpft. In diesem Fall ( $s \rightarrow \infty$ ) wird

$$(12) \quad \tan(\varphi) = \frac{G}{f} \frac{1}{1 - \frac{g}{f}} = 2 \frac{G}{f} \left( 1 - \frac{x}{f} \right).$$

Das (Spiegel-)Bild ohne Linse befindet sich im doppelten Abstand des Auges vom Spiegel, also im Abstand  $2(g + x)$  vom Auge. Mit Hilfe von Gl. (9) ergibt sich

$$(13) \quad 2 \frac{g + x}{f} = \frac{1 - 2 \left( \frac{x}{f} \right)^2}{1 - \frac{x}{f}}.$$

Für den Schwinkel  $\varphi_0$  ohne Linse gilt daher prinzipiell

$$\tan(\varphi_0) = \frac{G}{2(g + x)}.$$

Der Messung von  $\varphi_0$  sind jedoch Grenzen gesetzt, je nachdem, ob wir uns auf dem Ast der ausgezogenen Kurve links unten ( $x/f < 1/2$ ) oder rechts oben ( $x/f > 1$ ) in Abbildung 3 befinden.

Beobachten wir in der Nähe des Kurvenastes rechts oben ( $x/f > 1$ ), ist  $2(g + x)/f$  im Bereich unserer Abstände Linse-Spiegel ( $1 < x/f < 4$ ) größer als etwa  $10f$ . Für die Linse, mit der  $V$  bestimmt wurde ( $f = 15$  cm), reicht dieser Abstand aus, um das Bild bei entspanntem Auge auf der Netzhaut zu fokussieren. Daher gilt in diesem Fall

$$\tan(\varphi_0) = \frac{G}{2(g + x)} = \frac{G}{2f} \frac{1}{\frac{g}{f} + \frac{x}{f}}.$$

Mit Hilfe von Gl. (9) folgt daraus

$$\tan(\varphi_0) = \frac{G}{f} \frac{1 - \frac{x}{f}}{1 - 2\left(\frac{x}{f}\right)^2}.$$

Die Vergrößerung ist damit

$$(14) \quad V = 2 \left(1 - \frac{x}{f}\right) \frac{1 - 2\left(\frac{x}{f}\right)^2}{1 - \frac{x}{f}} = 2 \left[1 - 2\left(\frac{x}{f}\right)^2\right].$$

Bei Beobachtung in der Nähe des Kurvenastes links unten in Abbildung 3 sind Gegenstandsweite  $g$  und Abstand  $x$  nach Gl. (13) so klein, dass das (Spiegel-)Bild *ohne* Linse auch bei Akkommodation des Auges nicht auf der Netzhaut abgebildet wird. Für  $x/f < 1/2$  ist nämlich

$$2 \frac{g + x}{f} < 1,17..$$

Das Bild ist also weniger als das 1,2-fache der Brennweite vom Auge entfernt – in unserem Fall ( $f = 15$  cm) sind das höchstens 18 cm. Die deutliche Sehweite beträgt  $s_0 = 25$  cm. Daher ist es wenig sinnvoll, in diesem Fall eine Vergrößerung zu definieren – und eine solche zu messen.

Man könnte allenfalls den Sehwinkel ohne Linse so definieren, wie es im Fall der Lupe üblich ist. Das heißt, für  $\varphi_0$  den Wert anzusetzen, der sich bei Betrachtung des Gegenstands in deutlicher Sehweite ergibt. Also

$$\tan(\varphi_0) = \frac{G}{s_0}$$

mit  $s_0 = 25$  cm. Dann folgt mit Hilfe von Gl. (12) für die Vergrößerung

$$(15) \quad V = 2 \frac{s_0}{f} \left(1 - \frac{x}{f}\right).$$

Für  $x/f = 1/2$  gilt nach Gl. (12) für den Sehwinkel mit Linse  $\tan(\varphi) = G/f$  – genau so, als ob sich der Gegenstand, wie bei der Betrachtung durch eine Lupe, in der Brennweite der Linse befindet. Folgerichtig ergibt Gl. (15) in diesem Fall die aus der Literatur bekannte Vergrößerung  $V = s_0/f$  der Lupe. Das ändert aber nichts an der Tatsache, dass Gl. (15) in unserem Fall eine hypothetische Vergrößerung definiert.

### 3. Experiment

Die Theorie ist umfangreicher geworden als anfangs gedacht. Die Praxis fällt etwas bescheidener aus. Unsere Überlegung ging aus von der Frage, unter welchen Bedingungen das Auge ein Spiegelbild seiner selbst sieht. Wir beschränken uns, wie schon erwähnt, bei den Experimenten auf den Fall virtueller Bilder, die mit entspanntem (auf  $\infty$  eingestelltem) Auge beobachtet werden.

Zunächst prüfen wir, ob Gl. (9) tatsächlich die Bedingung für eine Beobachtung mit entspanntem Auge ist. Die Diskussion im Abschnitt 2.3 legt es nahe, die Fälle  $x/f < 1/2$  und  $x/f > 1$  (Kurve links unten bzw. Kurve rechts oben in Abbildung 3) getrennt zu untersuchen. Das Ergebnis für den Fall  $x/f < 1/2$  ist in Anhang C, Tabelle 1 zusammengefasst. Es wurden jeweils drei verschiedene Linsen ( $f = 10, 15$  und  $20$  cm) benutzt. Gemessen wurde, in Abhängigkeit von der Entfernung  $x$  der Linse vom Spiegel, der Abstand des Auges von der Linse (Gegenstandsweite  $g$ ), für den sich bei entspanntem Auge ein scharfes Bild ergab. In Abbildung 5 ist das entsprechende  $g$  als Funktion von  $x$  aufgetragen. Um die Messpunkte

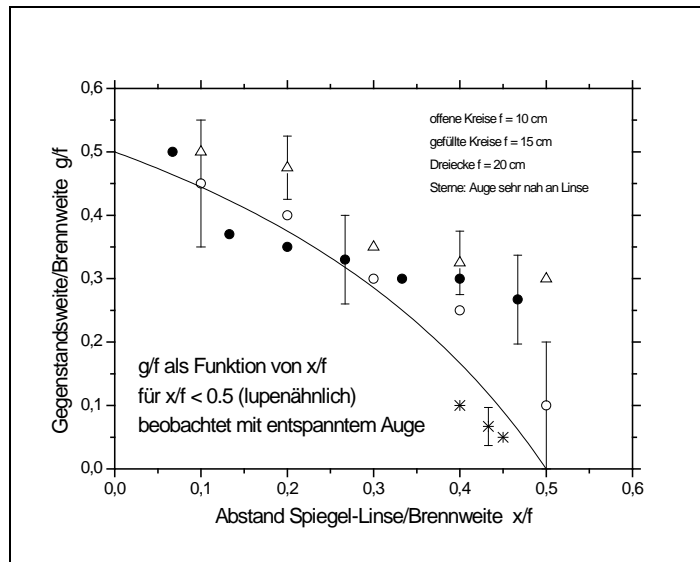


Abbildung 5 Gegenstandsweite als Funktion des Abstands Spiegel-Linse für  $x/f < 1/2$ . Beobachtung mit entspanntem Auge. Kurve:  $g/f$  nach Gl.(9) des Textes.

trotz der unterschiedlichen Linsen in einem Graphen darzustellen, wurden  $g$  und  $x$  in Einheiten der Brennweite  $f$  umgerechnet. Die Punkte haben große Fehlerbalken, da die Bedingung „entspanntes Auge“ nur mit einer gewissen Unsicherheit realisierbar ist. Die Theorie, das heißt Gl. (9), liefert die ausgezogene Linie. Die Messpunkte folgen ihr in etwa, aber es gibt Abweichungen. Vermutlich war das Auge nicht bei allen Beobachtungen vollkommen entspannt.

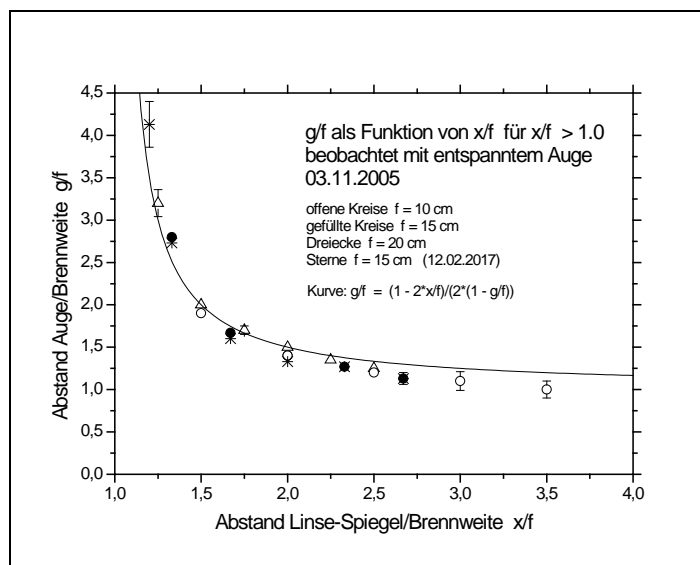


Abbildung 6 Gegenstandsweite  $g/f$  und Abstand  $x/f$  bei Beobachtung mit entspanntem Auge. Kurve: Theorie nach Gl. (9) des Textes.



Die Daten für den Fall  $x/f > 1$  (Kurve rechts oben in Abbildung 3) sind in Anhang C, Tabelle 2 gelistet. Auch hier wurden Linsen mit den oben angegebenen Brennweiten benutzt, und es wurde versucht, mit entspanntem Auge zu beobachten. Abbildung 6 zeigt, dass die theoretische Kurve den Verlauf der Messpunkte in etwa wiedergibt. Die Abweichungen bei größeren Werten von  $x/f$  könnten auch hier dadurch bedingt sein, dass nicht bei völlig entspanntem Auge beobachtet wurde.

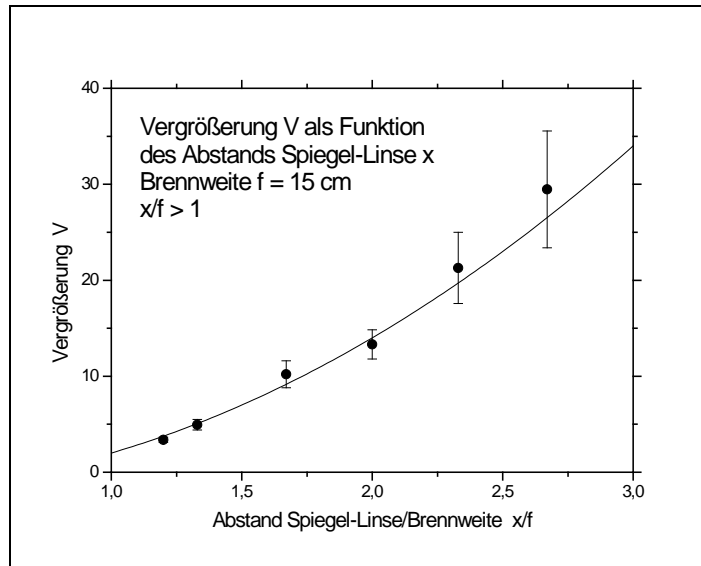


Abbildung 7 Vergrößerung  $V$  für  $x/f > 1$ . Brennweite der Linse  $f = 15$  cm.

Die Vergrößerung  $V$  lässt sich, wie oben erläutert, nur für  $x/f > 1$  messen. Die Schwinkel wurden ermittelt, indem der Durchmesser der Iris mit einer Schieblehre gemessen wurde – bei gleicher Entfernung vom Auge einmal mit, das andere Mal ohne Linse. Die Messdaten sind in Anhang C, Tabelle 3 aufgeführt und in Abbildung 7 dargestellt. Es zeigt sich, dass Experiment und Theorie recht gut übereinstimmen.

## Anhang A ( $g/f < 1$ )

Liegt das Bild, das die Linse ohne Spiegel erzeugt, wegen  $g/f < 1$  auf derselben Seite wie der Gegenstand (Abbildung 2), erzeugt der Brennpunktstrahl durch die Spitze von  $G$  ähnliche Dreiecke, aus denen man abliest

$$(A1) \quad \frac{B_s}{G} = \frac{f + s}{f - g} = \frac{\frac{s}{f} + 1}{1 - \frac{g}{f}}.$$

Mit Hilfe der Punkte  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  und  $T$  in derselben Abbildung (Bezeichnungen hier anders als in Abbildung 1) ergibt sich zunächst

$$\frac{\overline{QR}/2}{x} = \frac{G}{f} \quad \text{oder} \quad \overline{QR}/2 = G \frac{x}{f}.$$

Dann folgt aus der Konstruktionsvorschrift für den Durchstoßpunkt des reflektierten Brennpunktstrahls mit der Brennebene

$$\frac{\overline{QR}/2}{x} = \frac{\overline{ST}}{f},$$

und damit

$$\overline{ST} = \frac{f}{x} \overline{QR}/2 = \frac{f}{x} G \frac{x}{f} = G.$$

Schließlich erzeugt der reflektierte Brennpunktstrahl (einschließlich seiner rückwärtigen Verlängerung bis zur Spitze von  $B_S$ ) ähnliche Dreiecke, aus denen folgt

$$(A2) \quad \frac{B_S + \overline{ST}}{RT} = \frac{s + f}{f} = \frac{s}{f} + 1.$$

Mit

$$\overline{RS} = G - 2\overline{QR} = G - 2G \frac{x}{f} = G \left(1 - \frac{2x}{f}\right)$$

folgt

$$\overline{RT} = \overline{RS} + \overline{ST} = G \left(1 - \frac{2x}{f}\right) + G = 2G \left(1 - \frac{x}{f}\right).$$

Also gilt

$$\frac{B_S + \overline{ST}}{RT} = \frac{B_S + G}{2G \left(1 - \frac{x}{f}\right)}.$$

Damit folgt aus Gl. (A2)

$$\frac{B_S + G}{2G \left(1 - \frac{x}{f}\right)} = \frac{s}{f} + 1$$

oder

$$\frac{B_S}{G} + 1 = 2 \left(\frac{s}{f} + 1\right) \left(1 - \frac{x}{f}\right)$$

Zusammen mit Gl. (A1) wird dann

$$\frac{\frac{s}{f} + 1}{1 - \frac{g}{f}} = 2 \left(\frac{s}{f} + 1\right) \left(1 - \frac{x}{f}\right) - 1.$$

Multipliziert man beide Seiten mit  $(-1)$ , folgt

$$\frac{\frac{s}{f} + 1}{\frac{g}{f} - 1} = 2 \left(\frac{s}{f} + 1\right) \left(\frac{x}{f} - 1\right) + 1,$$

also Gl. (6) des Textes.

## Anhang B (Beispiele von Strahlengängen für $s/f \rightarrow \infty$ )

Wandert das Spiegelbild nach Unendlich, sind die vom Bild  $B_S$  ausgehenden Sehstrahlen parallel. Beispiele entsprechender Strahlengänge für die beiden Fälle  $x/f < 1/2$  und  $x/f > 1/2$ :



b)  $f = 15$  cm

$x/cm$	$g/cm$	$x/f$	$g/f$
1	7,5	0,067	0,5
2	5,5	0,133	0,37
3	5	0,200	0,33
4	$5 \pm 1$	0,267	$0,33 \pm 0,07$
5	4,5	0,333	0,3
6	4,5	0,400	0,3
7	$4 \pm 1$	0,467	$0,267 \pm 0,07$

c)  $f = 20$  cm

$x/cm$	$g/cm$	$x/f$	$g/f$
2	10	0,1	0,5
4	$9,5 \pm 1$	0,2	$0,475 \pm 0,05$
6	7	0,3	0,35
8	$6,5 \pm 1$	0,4	$0,325 \pm 0,05$
10	6	0,5	0,3

d)  $f = 10, 15$  und  $20$  cm,  $g/f < 0,1$  (Auge nah an Linse)

$f/cm$	$x/cm$	$x/f$	$g/f$
10	4	0,4	0,10
15	6,5	0,433	$0,07 \pm 0,03$
20	9	0,45	0,05

Tabelle 2 Gegenstandsweite  $g$  als Funktion des Abstands  $x$  des Spiegels von der Linse,  $x/f > 1$  (03.11.2005)

a)  $f = 10$  cm

$x/cm$	$g/cm$	$x/f$	$g/f$
15	19	1,5	1,9
20	14	2,0	1,4
25	12	2,5	1,2
30	11	3,0	1,1
35	10	3,5	1,0

b)  $f = 15$  cm

$x/cm$	$g/cm$	$x/f$	$g/f$
20	42	1,33	2,80
25	25	1,67	1,67
30	21	2,00	1,40
35	19	2,33	1,27
40	17	2,67	1,13

c)  $f = 20$  cm

$x/cm$	$g/cm$	$x/f$	$g/f$
25	64	1,25	3,2
30	40	1,5	2
35	34	1,75	1,7
40	30	2,00	1,5
45	27	2,25	1,35
50	25	2,50	1,25

d)  $f = 15 \text{ cm}$  (12.02.2017)

$x/\text{cm}$	$g/\text{cm}$	$x/f$	$g/f$
18	$0,62 \pm 0,04$	1,2	$4,13 \pm 0,27$
20	$0,41 \pm 0,02$	1,33	$2,73 \pm 0,13$
25	$0,24 \pm 0,01$	1,67	$1,60 \pm 0,07$
30	$0,20 \pm 0,01$	2,00	$1,33 \pm 0,07$
35	$0,19 \pm 0,01$	2,33	$1,27 \pm 0,07$
40	$0,17 \pm 0,01$	2,67	$1,13 \pm 0,07$

Tabelle 3 Vergrößerung  $V$  als Funktion des Abstands  $x$  des Spiegels von der Linse,  $x/f > 1$  (12.02.2017)

$f = 15 \text{ cm}$

$x/\text{cm}$	$x/f$	$V$
18	1,2	$3,38 \pm 0,26$
20	1,33	$4,94 \pm 0,55$
25	1,67	$10,21 \pm 1,40$
30	2,00	$13,32 \pm 1,53$
35	2,33	$21,28 \pm 3,71$
40	2,67	$29,47 \pm 6,09$