

Schwingungsverhalten des Drehspul-Torsionsgalvanometers

Kein physikalisches Grundpraktikum ohne den Versuch „Galvanometer“. Während des Studiums galt er als *hardcore physics*. Denn uns Studenten fehlte in den Anfangssemestern die Mathematik dazu (Differenzialgleichungen wurden erst später behandelt) – und meist auch die Zeit für die Vorbereitung. Hier also eine kleine Zusammenstellung der Physik des Torsions-Galvanometers und der dazu benötigten Mathematik.

1. Bewegungsgleichung

Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Torsions-Drehspulgalvanometers. Die (Dreh-) Spule habe n Windungen, ihre Breite sei b , ihre Länge l . Ihre Windungen stehen auf der gesamten

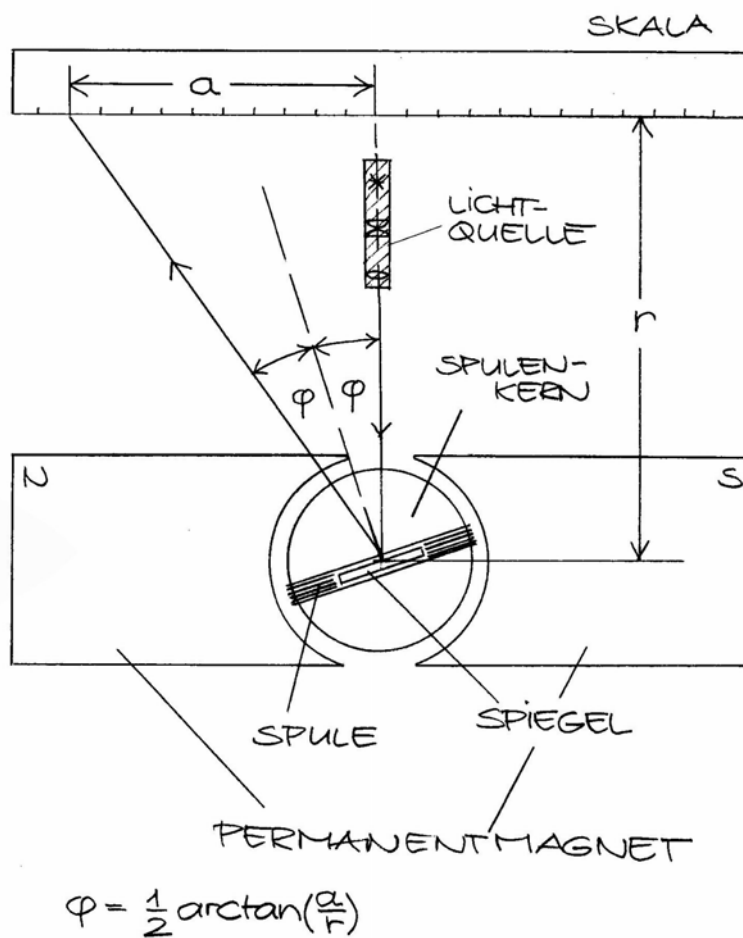


Abbildung 1 Prinzipieller Aufbau eines Galvanometers. Ansicht von oben.

Länge l senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfelds, das der Permanentmagnet erzeugt. Die Lorentzkraft F auf eine der beiden Seitenwindungen ist

$$(1) \quad F = nBl.$$

Dabei ist B die Feldstärke des Magnetfeldes und I der Strom durch die Spule. Da die Kraft F an beiden Seitenwindungen angreift, übt sie auf das Schwingungssystem (Spulenkörper und Torsionsfaden mit Spiegel) das Drehmoment

$$(2) \quad T = 2F \cdot b/2 = Fb = nBIlb$$

aus. Das Produkt lb ist die Querschnittsfläche A der Spule, also

$$(3) \quad A = lb.$$

Das Drehmoment lässt sich daher schreiben

$$T = nBIA.$$

Die Faktoren n , B und A der rechten Seite fasst man zur *Galvanometerkonstanten* G zusammen:

$$(4) \quad G = nBA.$$

Damit ist das Drehmoment, das durch den Strom I durch die Spule hervorgerufen wird,

$$(5) \quad T = GI.$$

Diesem Drehmoment stehen mehrere rücktreibende Drehmomente gegenüber:

- Das Rückstellmoment

$$- D\varphi$$

der Spiralfeder. Dabei ist D die Federkonstante oder Winkelrichtgröße der Feder und φ der Winkelausschlag des Spiegels. Im statischen Fall ist $D\varphi$ gleich dem vom Strom erzeugten Drehmoment GI , so dass φ proportional zum Strom I ist. Ein Drehspulinstrument ist demnach zunächst ein Strommesser – und zwar mit dem Vorteil einer linearen Skala.

- Das Drehmoment der Luftreibung

$$- \rho \dot{\varphi},$$

das in guter Näherung proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist.

- Das Drehmoment der elektromagnetischen Dämpfung, hervorgerufen durch die Bewegung der Spule im Magnetfeld des Permanentmagneten. Zur Berechnung gehen wir aus vom magnetischen Fluss dieses Feldes durch die Spule. Der ändert sich bei der Drehung im Magnetfeld mit der Zeit, so dass an den Enden der Spule eine Spannung induziert wird. Der magnetische Fluss durch die Spule ist

$$\phi = Blb \sin \varphi \cong Blb \varphi = BA\varphi,$$

wobei die Näherung für kleine Winkel φ gilt. Dessen zeitliche Ableitung ist

$$\dot{\phi} = BA \dot{\varphi}.$$

Also wird die Spannung

$$U_{ind} = -n\dot{\phi} = -nBA\dot{\varphi} = -G\dot{\varphi}$$

induziert. Diese Spannung treibt bei der Messung an einem äußeren Widerstand R_a den Strom

$$I_{ind} = -\frac{U_{ind}}{R_a + R_i}$$

durch den Messkreis. Dabei ist R_i der Innenwiderstand des Galvanometers. Dieser „induzierte“ Strom wirkt dem zu messenden Strom I entgegen, daher das Minuszeichen (*Lenz'sche Regel*). Insgesamt fließt der Strom

$$I_{ges} = I - I_{ind} = I - \frac{U_{ind}}{R_a + R_i} = I - \frac{G}{R_a + R_i} \dot{\varphi}.$$

Das gesamte „elektrische“ Drehmoment auf die Spule ist daher, wenn neben dem eingepprägten Strom I auch I_{ind} berücksichtigt wird,

$$T = GI_{ges} = G \left(I - \frac{G}{R_a + R_i} \dot{\varphi} \right) = GI - \frac{G^2}{R_a + R_i} \dot{\varphi}.$$

Dabei ist der Term GI , wie man unschwer erkennt, das schon in Gl. (5) genannte Drehmoment des eingepprägten (zu messenden) Stroms, während der zweite Term das Moment infolge der elektromagnetischen Dämpfung darstellt.

Insgesamt wirken damit vier Drehmomente auf unser Torsionssystem: Das „vorwärts“ wirkende Moment, das durch den zu messenden Strom erzeugt wird, und die drei rücktreibenden Momente der Spiralfeder, des Luftwiderstandes und der elektromagnetischen Dämpfung. Die Bewegungsgleichung für das Torsionssystem lautet demnach

$$J \ddot{\varphi} = GI - D\varphi - \rho \dot{\varphi} - \frac{G}{R_a + R_i} \dot{\varphi},$$

oder, in der üblichen Schreibweise

$$(6) \quad J \ddot{\varphi} + \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right) \dot{\varphi} + D\varphi = GI.$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment unseres Systems. Die Differenzialgleichung beschreibt eine abklingende harmonische Schwingung um den Nullpunkt $\varphi = GI/D$. Mit den Abkürzungen

$$(7) \quad 2\beta = \frac{1}{J} \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right)$$

und

$$(8) \quad \omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

lautet sie

$$(9) \quad \ddot{\varphi} + 2\beta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{G}{J} I.$$

2. Lösung der Bewegungsgleichung

2.1 Ansatz, allgemeine Lösung und Randbedingungen

Wie üblich macht man zur Lösung von Gl. (9) den Ansatz

$$\varphi(t) = C \exp(\lambda t) + \varphi_0.$$

Die Ableitungen sind

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda C \exp(\lambda t) \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 C \exp(\lambda t).$$

Setzt man diese in Gl. (9) ein, folgt

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) C \exp(\lambda t) + \omega_0^2 \varphi_0 = \frac{G}{J} I.$$

Diese Gleichung muss für *alle* Zeiten t erfüllt sein. Das ist nur dann der Fall, wenn die Klammer der linken Seite verschwindet und der von t unabhängige Term gleich der rechten Seite ist. Aus der zweiten Forderung folgt

$$(10) \quad \varphi_0 = \frac{G}{J\omega_0^2} I = \frac{G}{D} I.$$

Das ist die schon erwähnte statische Lösung ($\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$). Die erste Forderung führt auf die Gleichung

$$(11) \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$(12) \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Mit der Abkürzung

$$(13) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

werden diese zu

$$(14) \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega.$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (9) lautet also

$$(15) \quad \varphi(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + \varphi_0$$

mit $\lambda_{1,2}$ nach Gl. (14). Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Wir beschränken uns auf den „einfachen“ Fall, dass die Anfangsauslenkung um den Winkel ϕ_0 größer ist als der Winkel φ_0 der Ruhelage, und dass die Anfangs-Winkelgeschwindigkeit Null ist. Also auf die Bedingungen

$$(16) \quad \begin{aligned} \varphi(0) &= \phi_0 + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= 0 \end{aligned}.$$

Das führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \phi_0 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$C_1 = \frac{\phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2 \quad \text{und} \quad C_2 = -\frac{\phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1.$$

Unsere spezielle Lösung lautet somit

$$(17) \quad \varphi(t) = \frac{\phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 \exp(\lambda_1 t) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 t)] + \varphi_0.$$

Die Art der Bewegung hängt nun ab, ob ω_0 größer, kleiner oder gleich β ist.

2.2 Schwingfall

Wir betrachten zunächst den Fall $\omega_0 > \beta$. Wegen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (Gl. (13)) ist ω dann reell und es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{\phi_0}{-2i\omega} [(-\beta - i\omega)\exp(-\beta t + i\omega t) - (-\beta + i\omega)\exp(-\beta t - i\omega t)] + \varphi_0 \\
&= \frac{\phi_0}{-2i\omega} \exp(-\beta t) [-i\omega[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] - \beta[\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)]] + \varphi_0 \\
(18) \quad &= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2} + \frac{\beta \exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{\omega 2i} \right] + \varphi_0 \\
&= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] + \varphi_0
\end{aligned}$$

Damit ist die Bewegung in diesem Fall eine exponentiell abklingende Schwingung um die Ruhelage φ_0 , ausgehend von der Anfangsauslenkung $\phi_0 + \varphi_0$. Die Frequenz ist ω , die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Gleichung (18) zeigt, dass der Zeiger des Galvanometers nach Abklingen der Schwingung um den Winkel

$$\varphi_0 = \frac{G}{J\omega_0^2} I$$

ausgelenkt ist – also um einen Winkel proportional zum Strom I , der durch die Spule fließt. Der Proportionalitätsfaktor

$$(19) \quad C_I = \frac{G}{J\omega_0^2}$$

wird *Stromempfindlichkeit* des Galvanometers genannt.

2.3 Kriechfall

Im zweiten Fall ist $\omega_0 < \beta$, daher wird $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ imaginär. Wir definieren $\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, so dass

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \omega$$

reell ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{\phi_0}{-2\omega} [(-\beta - \omega)\exp(-\beta t + \omega t) - (-\beta + \omega)\exp(-\beta t - \omega t)] + \varphi_0 \\
&= \frac{\phi_0}{-2\omega} \exp(-\beta t) [-\omega[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] - \beta[\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)]] + \varphi_0 \\
(20) \quad &= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\frac{\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)}{2} + \frac{\beta \exp(\omega t) - \exp(-\omega t)}{\omega 2} \right] + \varphi_0 \\
&= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\cosh(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sinh(\omega t) \right] + \varphi_0
\end{aligned}$$

Die entsprechende Bewegung wird üblicherweise als „Kriechen“ bezeichnet: Der Zeiger bewegt sich von seiner Anfangsauslenkung $\phi_0 + \varphi_0$ langsam und ohne Richtungsänderung auf die Ruhelage φ_0 zu. Der Wert von φ_0 ist derselbe wie im Schwingfall.

2.4 Aperiodischer Grenzfall

Im dritten Fall ist $\omega_0 = \beta$. Dann folgt $\lambda_2 = \lambda_1 = -\beta$ und der Nenner auf der rechten Seite von Gl. (17) wird Null. Damit ist diese Gleichung als Lösung unbrauchbar. Der Mathematiker entnimmt man, dass jetzt der Ansatz

$$\varphi(t) = A(1 + Bt)\exp(\lambda t) + \varphi_0$$

die Bewegungsgleichung löst. Wir bilden zunächst die Ableitungen

$$\dot{\varphi}(t) = A\exp(\lambda t)(B + \lambda + B\lambda t)$$

und

$$\ddot{\varphi}(t) = A\exp(\lambda t)(2B\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 Bt).$$

Setzt man diese in Gl. (9) ein, folgt

$$A\exp(\lambda t)[\{2B(\lambda + \beta) + (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)\} + B(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)t] + \beta^2\varphi_0 = \frac{G}{J}I.$$

Auch diese Gleichung muss für alle Zeiten t erfüllt sein. Daher folgt, wie oben,

$$\varphi_0 = \frac{G}{J\beta^2}I = \frac{G}{J\omega_0^2}I$$

und

$$\{2B(\lambda + \beta) + (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)\} + B(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)t = 0.$$

Die Klammer, die als Faktor bei t steht, ist gleich $(\lambda + \beta)^2$ und wird Null für $\lambda = -\beta$. Die geschweifte Klammer wird dann ebenfalls Null – sozusagen „automatisch“. Damit lautet die Lösung

$$(21) \quad \varphi(t) = A(1 + Bt)\exp(-\beta t) + \varphi_0.$$

Als Randbedingungen geben wir, wie in Gl. (16), vor

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt (kleine Rechenübung) $A = \varphi_0$ und $B = \beta$ und die Lösung wird zu

$$(22) \quad \varphi(t) = \varphi_0(1 + \beta t)\exp(-\beta t) + \varphi_0.$$

Die zugehörige Bewegung ist, wie man aus $\omega_0 = \beta$ schließt, der Grenzfall zwischen „Schwingen“ und „Kriechen“, genannt *aperiodischer Grenzfall*. In der Messtechnik ist er von Bedeutung, da sich der Zeiger in diesem Fall in der kürzest möglichen Zeit zum „Messwert“ φ_0 hin bewegt – und ohne Überschwingen dort verharrt. Auch hier ist der Wert von φ_0 derselbe wie in den Fällen „Schwingen“ und „Kriechen“.

Der aperiodische Grenzfall lässt sich bei einer Messung mit dem Galvanometer herbeiführen, indem man den Widerstand R_a des Messkreises geeignet wählt. Mit den Termen für ω_0 und β nach Gln. (7) bzw. (8) folgt nämlich, dass $\omega_0 = \beta$ erfüllt ist, wenn gilt

$$\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{1}{2J} \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right).$$

Daraus folgt

$$2\sqrt{DJ} = \rho + \frac{G^2}{R_a + R_i}$$

und weiter

$$(23) \quad R_{a,Gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{DJ} - \rho} - R_i$$

Abbildung 2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Zeigerauslenkung eines Galvanometers für die drei untersuchten Fälle. Dabei wurde als Schwingungsdauer $T = 1,5$ s angenommen. Als Ruhelage

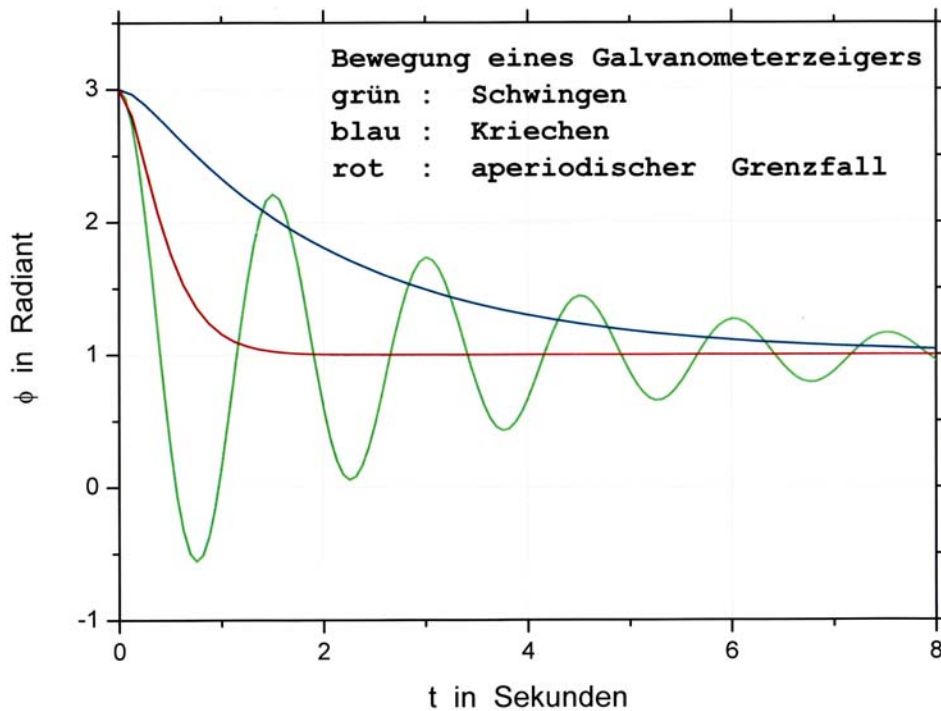


Abbildung 2 Schwingen, Kriechen und aperiodischer Grenzfall des Galvanometerzeigers. Siehe Text.

wurde der Einfachheit halber gewählt $\varphi_0 = 1$, als Anfangsauslenkung $\phi_0 = 3$ (in beliebiger Einheit, beispielsweise $1/10$ rad). Der Schwingfall wurde mit $\beta = 0,5/T$ realisiert, der Kriechfall mit $\beta = 4,8/T$. Im aperiodischen Grenzfall war, wie gefordert, $\beta = 2\pi/T$.

3. Ballistisches Galvanometer

Lässt man einen Strom von kurzer Dauer durch das Galvanometer fließen, kann das Instrument zur Messung der hindurch geflossenen Ladung verwandt werden. *Kurze Dauer* heißt, präziser formuliert, dass der Stromstoß nach weniger als 1% der Schwingungsdauer des Galvanometers abgeklungen ist. Nach dem Ende des Stromstoßes schwingt das Torsionssystem aus der Ruhelage bis zu einem Umkehrpunkt und kehrt dann je nach Dämpfung schwingend oder kriechend in die Gleichgewichtslage zurück. Der Ausschlag am Umkehrpunkt ist ein Maß für die im Stromstoß geflossene Ladung. Das Instrument arbeitet wie ein ballistisches Pendel, das Kraftstöße misst. Daher die Bezeichnung „ballistisches Galvanometer“.

Die Bewegungsgleichung des Torsionssystems gilt auch im ballistischen Fall. Gleichung (9) muss jedoch an die dabei vorliegenden Bedingungen angepasst werden. Zunächst ist zwischen der Zeitspanne des Stromflusses ($t < T_Q$) und der Zeit nachher ($t > T_Q$) zu unterscheiden:

(1) $t < T_Q$

Während der kurzen Dauer des Stromstoßes sind sowohl der Ausschlag φ als auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Galvanometers vernachlässigbar klein. Das heißt, Gl. (9) wird zu

$$(24) \quad \ddot{\varphi} = \frac{G}{J} I.$$

Da der Strom I gleich der zeitlichen Ableitung der hindurch fließenden Ladung Q ist, folgt

$$\ddot{\varphi} = \frac{G}{J} \dot{Q}.$$

Integriert man beide Seiten von $t = 0$ bis zum Ende T_Q des Stromstoßes, erhält man

$$\int_0^{T_Q} \ddot{\varphi} dt = \frac{G}{J} \int_0^{T_Q} \dot{Q} dt$$

oder

$$(25) \quad \dot{\varphi}(T_Q) = \frac{G}{J} Q.$$

(2) $t > T_Q$

Nach dem Ende des Stromstoßes schwingt das Galvanometer frei, so dass die rechte Seite von Gl. (9) Null ist:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Diese Differenzialgleichung ist zu integrieren, und zwar für die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T_Q) = \frac{G}{J} Q.$$

Dabei wurde für $\dot{\varphi}(0)$ die vorhin berechnete Winkelgeschwindigkeit am Ende des Stromstoßes verwandt (Gl. (25)). Der (übliche) Lösungsansatz

$$\varphi(t) = C \exp(\lambda t)$$

ergibt

$$(26) \quad \varphi(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

(Gl. (15) ohne den Term φ_0). Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Schwingfall $\omega_0 > \beta$.

Dann gilt

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Setzt man die Anfangsbedingungen ein, folgt

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \dot{\varphi}_0 = \frac{G}{J} Q$$

und weiter

$$C_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2i\omega}$$

$$C_2 = -\frac{\dot{\varphi}_0}{2i\omega}$$

Damit wird Gl. (26 zu

$$(27) \quad \varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \exp(-\beta t) \left[\frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i} \right]$$

$$= \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \exp(-\beta t) \sin(\omega t)$$

Das heißt, das Galvanometer bewegt sich sinusförmig aus der Ruhelage heraus und schwingt dann gedämpft mit der Frequenz ω und der Abklingkonstanten β .

Die Messgröße ist (siehe oben) der Winkelausschlag am ersten Umkehrpunkt. Dieser ist

$$\varphi_B = \varphi(t = T/4) = \varphi(\omega t = \pi/2).$$

Setzt man sehr kleine Dämpfung voraus, also

$$\beta \ll 1 \quad \text{und} \quad \beta \ll \omega_0,$$

gilt näherungsweise $\omega = \omega_0$ und $\exp(-\beta T/4) \approx 1$. Dann wird

$$(28) \quad \varphi_B = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \exp(-\beta T/4) \cong \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} = \frac{G}{J\omega_0} Q.$$

Der Winkelausschlag am ersten Umkehrpunkt ist damit proportional zur Ladung Q , die durch das Galvanometer geflossen ist. Der Quotient

$$(29) \quad C_B = \frac{G}{J\omega_0}$$

heißt *ballistische Empfindlichkeit*. Er ist mit der (statischen) *Stromempfindlichkeit* C_I (Gl. (19)) verknüpft durch

$$(29) \quad C_B = C_I \omega_0.$$

Auch bei größerer Dämpfung (β nicht vernachlässigbar klein) ist φ_B proportional zu Q . Jedoch schlägt jetzt der Faktor $\exp(-\beta T/4)$ zu Buch, so dass die ballistische Empfindlichkeit kleiner wird.

Literatur

¹ Wilhelm Walcher: Praktikum der Physik, B.G. Teubner, Stuttgart 1967; Wilhelm H. Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg, Wiesbaden, 13. Auflage 1983.

Anleitungen zum Praktikumsversuch „Galvanometer“ im Internet, z. B. unter Adresse <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3931>.