Zwischen Erdoberfläche und Ionosphäre können sich stehende elektromagnetische Wellen ausbilden. Sie werden durch die Blitze der Gewitter angeregt, die auf der Erde tätig sind. Die Frequenzen dieser Wellen wurden erstmals von *Schumann* [Schu 52] berechnet. Im Spektrum des Rauschens, das man mit einer Antenne empfängt, machen sich die Wellen als Resonanzen bei sehr niedrigen Frequenzen bemerkbar (*Schumann-Resonanzen*).

Die Frequenzen ergeben sich aus den Randbedingungen für das elektromagnetische Feld, das sich in der Kugelschale zwischen Erdoberfläche und Ionosphäre ausbildet. Man kann Erdoberfläche und Ionosphäre als nahezu perfekt leitend betrachten. Sie wirken damit als Wände eines kugelschalenförmigen Resonators für elektromagnetische Wellen. Wegen der guten Leitfähigkeit dieser Wände muss die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke dort verschwinden. Damit drückt man aus, dass auch bei zeitlich veränderlichen Feldern die elektrische Feldlinien auf unendlich gut leitenden Flächen senkrecht stehen. Die nachfolgenden Rechnungen sind Ausarbeitungen des Kapitels *EM Standing Waves in Resonant Cavities* eines Vorlesungsskripts[1] von *Errede* [Err 11].

Die Wände unseres Resonators sind Kugeln mit den Radien a = 6370 km (Erdradius) und $b = a + h$, wobei h die Höhe ist, in der sich die unterste Ionosphärenschicht befindet ($h \cong 80$ km). Uns interessieren die niedrigsten Eigenfrequenzen dieses Resonators. Sie treten auf bei der Anregung von transversal magnetischen (*TM*) Wellen. Diese besitzen kein radiales Magnetfeld ($B_r = 0$) und können die Randbedingungen für die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke $E_\theta\,(a) = E_\theta\,(b) = 0$ erfüllen, ohne dass sich das Feld in radialer Richtung nennenswert ändert. Die Tangentialkomponente E_θ dagegen variiert über Längen von der Größenordnung des Erdradius a. Von ähnlicher Größe ist die Wellenlänge der *TM*-Wellen. Da die Frequenz f der Quotient aus Lichtgeschwindigkeit c (= $3{\cdot}10^8$ m/s) und Wellenlänge ist, erwartet man für die niedrigsten Eigenfrequenzen der *TM*-Wellen Werte $f_{TM} \sim c/a$ (≈ 50 Hz). Für die transversal elektrischen (*TE*-) Moden andererseits muss die Tangentialkomponente E_θ im Intervall zwischen a und $b = a + h$ Schwingungsbäuche und -knoten bilden. Daher liegen deren tiefste Frequenzen im Bereich $f_{EM} \sim c/h$ (≈ 4 kHz).

Zusätzlich zu unserer Beschränkung auf *TM*-Moden setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass die Felder in azimutaler Richtung konstant sind, also nicht von ϕ abhängen[2]. Dann folgt aus der Tatsache, dass die Divergenz der magnetischen Feldstärke B verschwindet[3], dass das Magnetfeld nur eine ϕ-Komponente besitzt. Denn

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \;=\; 0\,,$$

in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) geschrieben, lautet

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) \;+\; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(B_\theta \sin\theta) \;+\; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} \;=\; 0\,.$$

Da $B_r = 0$ und $\partial B_\phi/\partial\phi = 0$, bleibt auf der linken Seite nur der Term mit der Ableitung nach θ übrig. Führt man die Ableitung aus und multipliziert anschließend mit r, erhält man

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} \;+\; \frac{\cos\theta}{\sin\theta}B_\theta \;=\; 0\,.$$

Aus der Forderung, dass B_θ an der Stelle $\theta = 0$ endlich bleibt, folgt daher $B_\theta = 0$ überall.

Wir machen uns jetzt an die Aufgabe, die *Maxwellschen Gleichungen* für den Kugelschalen-Hohlleiter unter den Bedingungen $B_r = 0$ und $B_\theta = 0$ zu lösen. Da er keine Ladungen und Leiterströme enthält, lauten das *Faradaysche* und *Ampèresche Gesetz*

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ c^2\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \; .$$

Dabei ist E die elektrische Feldstärke. Wie üblich, setzen wir harmonische Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ voraus ($\omega = 2\pi f$), so dass folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} &= i\omega\vec{B} \\ c^2\vec{\nabla}\times\vec{B} &= -i\omega\vec{E} \end{aligned} \; .$$

Setzt man den Term für die elektrische Feldstärke aus der zweiten Gleichung in die erste ein, ergibt sich

$$-\frac{c^2}{i\omega}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = i\omega\vec{B}$$

oder

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{B} = 0 .$$

In der Vektoranalysis lernt man, dass für jeden Vektor F gilt

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F} .$$

Daher lässt sich diese Gleichung unter Beachtung von $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ schreiben als

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\vec{B} = 0 .$$

Das heißt, der Vektor der magnetischen Feldstärke genügt einer (Vektor-)*Helmholtzgleichung*. Der *Laplace-Operator* lautet, in Kugelkoordinaten geschrieben,

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} .$$

Da unsere Felder nicht von ϕ abhängen, entfällt der letzte Term auf der rechten Seite, und die *Helmholtzgleichung* für B_ϕ wird zu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial B_\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial B_\phi}{\partial\theta}) + \frac{\omega^2}{c^2}B_\phi = 0 .$$

Man rechnet leicht nach, dass gilt

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial B_\phi}{\partial r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rB_\phi) .$$

Setzt man dies in die vorherige Gleichung ein und multipliziert diese mit r, ergibt sich

$$\frac{\omega^2}{c^2}(rB_\phi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rB_\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(rB_\phi)\right] = 0 .$$

Der Winkelanteil kann wie folgt umgeschrieben werden

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(rB_\phi)\right] = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(rB_\phi) + \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(rB_\phi)\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(rB_\phi) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(rB_\phi)\right].$$

Damit ergibt sich für die Größe rB_ϕ die Differenzialgleichung

$$\frac{\omega^2}{c^2}(rB_\phi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rB_\phi) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(rB_\phi) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(rB_\phi)\right] = 0 .$$

Wir versuchen, rB_ϕ als Produkt zweier Funktionen u und f zu schreiben, wobei u nur von r und f nur von θ abhängt. Also

$$rB_\phi = u(r)\cdot f(\theta) .$$

Dieser Ansatz führt zu

$$\frac{\omega^2}{c^2}u(r)f(\theta) + f(\theta)\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{u(r)}{r^2}\left[\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\right] = 0 .$$

Damit haben wir die Trennung in je eine Gleichung für $u(r)$ und $f(\theta)$ fast erreicht. Denn ergänzt man die beiden Summanden in der eckigen Klammer durch den Term $+\, l(l+1)f(\theta)$, so erhält man eine Differenzialgleichung, deren Lösungen die *zugeordneten Legendre-Polynome* $P^1{}_l(\cos\theta)$ mit l = 1, 2, 3, … und $m = \pm 1$ sind. Mit anderen Worten, wenn $f(\theta) = P^1{}_l(\cos\theta)$, dann erfüllt $f(\theta)$ die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta} + l(l+1)f(\theta) = 0 .$$

Daher kann die eckige Klammer durch $-l(l+1)f(\theta)$ mit $f(\theta) = P^1{}_l(\cos\theta)$ ersetzt werden. Das ergibt nach Ausklammern von $f(\theta)$

$$f(\theta)\cdot\left\{\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r)\right\} = 0 .$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch $f(\theta) = 0$ oder durch

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r) = 0 .$$

Damit genügt $u_l(r)$ einer *Besselsche Differenzialgleichung*. Deren Lösungen sind die sphärischen *Bessel-* oder *Hankelfunktionen*, die wir nicht weiter betrachten müssen[4]. Denn in unserem Fall kann man auf Näherungslösungen zurückgreifen, wie sich weiter unten herausstellen wird.

Wir wenden uns jetzt den Randbedingungen zu. Diese betreffen die Tangentialkomponente E_θ der elektrischen Feldstärke und lauten $E_\theta(a) = E_\theta(b) = 0$. Damit drückt man aus, dass auch bei zeitlich veränderlichen Feldern (wie in unserem Fall) die elektrische Feldlinien auf den unendlich gut leitenden Kugelflächen bei $r = a$ (Erdoberfläche) und $r = b$ (unterste Ionosphärenschicht) senkrecht stehen. Die Tangentialkomponente E_θ der elektrischen Feldstärke lässt sich aus der Lösung für B_ϕ berechnen. Nach dem *Ampèreschen Gesetz* ist nämlich

$$\vec{E} = \frac{ic^2}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{B} .$$

Die Rotation eines Vektors F lautet, in Kugelkoordinaten ausgedrückt,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F} = & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(F_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{e}_r \\ & + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta . \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi\end{aligned}$$

Damit folgt für den Vektor der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{ic^2}{\omega}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(B_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\sin\theta\frac{\partial(rB_\phi)}{\partial r}\right)\cdot\vec{e}_\theta\right]$$

und insbesondere für dessen Tangentialkomponente

$$E_\theta = -\frac{ic^2}{\omega r}\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\cdot P_l^1(\cos\theta) .$$

Unsere Randbedingungen werden damit zu

$$\left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=b} = 0 .$$

Wie schon angedeutet, wenden wir diese Randbedingungen nicht auf die exakten Lösungen der *Besselschen Differenzialgleichung* an. Wir versuchen vielmehr, die Gleichung für $u_l(r)$ näherungsweise zu lösen und die Randbedingungen an der Näherungslösung anzubringen. Eine Näherungslösung ergibt sich aus der Tatsache, dass die Höhe h unseres Resonators klein ist gegenüber dem Erdradius a. Daher können wir die Variable r in guter Näherung durch den konstanten Wert a (oder b) ersetzen, und erhalten so die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2}\right]u_l(r) = 0 .$$

Mit der Abkürzung

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2}$$

folgt

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + k^2 u_l(r) = 0 ,$$

also die Gleichung einer harmonischen Schwingung. Diese hat die Lösungen

$$u_l(r) = A\cos(kr) + B\sin(kr)$$

und unsere Randbedingungen lauten jetzt

$$\left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=a} = -kA\sin(ka) + kB\cos(ka) = 0$$
$$\left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=a} = -kA\sin(kb) + kB\cos(kb) = 0 \ .$$

Addiert man beide Gleichungen, folgt

$$-A[\sin(ka) + \sin(kb)] + [\cos(ka) + \cos(kb)] = 0\,,$$

oder, umgeformt

$$-A\sin\frac{k(a+b)}{2}\cos\frac{k(a-b)}{2} + B\cos\frac{k(a+b)}{2}\cos\frac{k(a-b)}{2} = 0\,.$$

Wir benutzen unsere Voraussetzung $h = a - b \ll a$ (und damit $b \approx a$), um $a + b$ durch $2a$ anzunähern, und erhalten

$$B = \frac{\sin(ka)}{\cos(ka)}\,.$$

Damit lautet unsere Näherungslösung

$$u_l(r) = A\left[\cos(kr) + \frac{\sin(ka)}{\cos(ka)}\sin(kr)\right]$$

oder

$$\begin{aligned} u_l(r) &= A\,[\cos(kr)\cos(ka) + \sin(kr)\sin(ka)] \\ &= A\cos[k(r-a)] \end{aligned}\quad ,$$

wobei die Konstante A umdefiniert wurde. Die zweite Randbedingung fordert, dass die Ableitung von $u_l(r)$ an der Stelle $r = b$ verschwindet, das heißt

$$\left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=a} = -kA\sin[k(b-a)] = 0 \ .$$

Daraus folgt

$$k(b-a) = kh = n\pi, \quad n = 0,1,2,...$$

und

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{a^2} = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 .$$

Damit sind die Eigenfrequenzen gegeben durch

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \frac{l(l+1)}{a^2}}$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $l = 1, 2, 3, \ldots$. Da $h \ll a$, haben die Schwingungsmoden mit $n = 1, 2, \ldots$ relativ hohe Frequenzen $\omega_{nl} \approx n(c/h)\pi$. Nur für $n = 0$ gibt es vergleichsweise niedrige Frequenzen. Sie sind in unserer Näherung gegeben durch

$$\omega_{0l} = \frac{c}{a}\sqrt{l(l+1)} \ .$$

Die zugehörigen Schwingungsmoden sind die hier interessierenden *Schumann-Resonanzen*. Setzt man $c = 3\cdot10^8$ m/s und $a = 6370$ km in die Gleichung für ω_{0l} ein, erhält man für $l = 1, 2, 3$ und 4 als niedrigste Frequenzen 10,6 Hz, 18,3 Hz, 26,0 Hz und 33,5 Hz.

Die Messung ergibt Linien bei etwa 8 Hz, 14 Hz, 21 Hz, 28 Hz und höheren Frequenzen. Der Unterschied zu den vorhin berechneten Werten rührt daher, dass sowohl Erdoberfläche als auch Ionosphäre keine idealen Leiter sind. Daher dringt die elektromagnetische Welle in diese Gebiete ein und führt zu einem effektiven Wert von a, der größer ist als der hier verwandte Erdradius. Eine Abschätzung dieses Effekts findet sich in der Arbeit von Schumann [Schu 52]. Dort wird im Übrigen auch mit den exakten Lösungen der *Besselschen Differenzialgleichung* gerechnet[5].

Anmerkungen

[1] Prof. *Steven Errede*, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, *UIUC Physics 436 EM Fields & Sources II Fall Semester, 2011 Lecture Notes 10.5* [Err 11]. Siehe auch die Rechnungen eines unbekannten Dozenten (gefunden auf einer Website des *Finnish Meteorological Institutes*) [NN 13].

[2] Wir benutzen Kugelkoordinaten mit den üblichen Bezeichnungen (r, θ, ϕ), siehe mathematische Formelsammlungen, z. B. die unter [3]) genannten

[3] Literatur zu den Maxwellschen Gleichungen: z. B. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. II, 18-1 [FeyL 64], oder J. D. Jackson, Classical Electrodynamics [Jac 62]. Die Divergenz der magnetischen Feldstärke ist Null, denn es gibt keine magnetischen Ladungen. Näheres zum Nabla- und Laplace-Operator (∇ bzw. ∇^2) siehe mathematische Formelsammlungen, z. B. *L. Råde und B. Westergren, Springers Mathematische Formeln* [RadW 96], *oder I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew et al.*, *Taschenbuch der Mathematik* [BroS 93]

[4] Näheres über die Lösung der *Besselschen Differenzialgleichung* im Rahmen der Elektrodynamik findet sich beispielsweise bei *J. D. Jackson*, *Classical Electrodynamics,* Kapitel 16 (Multipole Fields) [Jac 62]

[5] Nach meiner Rechnung erhält man auch bei der Benutzung von *sphärischen Hankelfunktionen* für den Fall unendlich gut leitender Kugelschalen bei $r = a$ und $r = b$ in der Näherung $a - b \ll a$ die in der letzen Gleichung des Textes angegebenen Eigenfrequenzen.

Literatur

BroS 93	*I. N. Bronstein*, *K. A. Semendjajew et al.*, *Taschenbuch der Mathematik*, erweiterte Lizenzausgabe, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993
Err 11	**`web.hep.uiuc.edu/home/serrede/P436/Lecture_Notes/P436_Lect_10.pdf`**
FeyL 64	*R. P. Feynman*, *R. B. Leighton* and *M. Sands*, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading 1964
Jac 62	*J. D. Jackson*, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York 1962
NN 13	Gefunden im Web unter **`space.fmi.fi/~viljanea/eds2005/eds2005_6.pdf`**
RadW 96	L. *Råde und B. Westergren*, *Springers Mathematische Formeln*, Springer, Berlin 1996
Schu 52	*Schumann W. O.* (1952): Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist. *Zeitschrift und Naturforschung* **7a**: 149–154. Bibcode:1952ZNatA...7..149S.