Schumann-Resonanzen, Randbedingungen mit Hankelfunktionen

Die Frequenzen der *Schumann-Resonanzen* [Schu 52] lassen sich in guter Näherung berechnen[1], indem man den Radialteil der Größe $u(r) = rB_\phi$ durch die trigonometrischen Funktionen *sin* und *cos* ausdrückt. Dabei ist B_ϕ die Azimutalkomponente der Magnetfeldstärke des elektromagnetischen Feldes, das zwischen Erdoberfläche und Ionosphäre herrscht. Die Koordinate r bezeichnet den Abstand vom Erdmittelpunkt. Aus der Lösung für B_ϕ ergibt sich die Tangentialkomponente E_θ der elektrischen Feldstärke. Diese muss auf den Kugeln mit den Radien a = 6370 km (Erdradius) und $b = a + h$ verschwinden, wobei h die Höhe ist, in der sich die unterste Ionosphärenschicht befindet ($h \cong 80$ km). Aus diesen Randbedingungen folgen die Frequenzen der Schumann-Resonanzen.

Bei exakter Rechnung ist der Radialteil $u(r)$ eine Lösung der *Besselschen Differenzialgleichung* und somit eine Kombination von *sphärischen Bessel-* oder *sphärischen Hankelfunktionen*. Es stellt sich daher die Frage, welche Frequenzen sich ergeben, wenn B_ϕ und E_θ exakt berechnet werden und die Randbedingungen an der exakten Lösung für E_θ angebracht werden[2]. Dazu die nachfolgenden Rechnungen.

Für die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke erhält man[1]

(1) $$E_\theta = -\frac{ic^2}{\omega r}\frac{\partial u_l(r)}{\partial r} \cdot P_l^1(\cos\theta) \ .$$

Dabei verwenden wir Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ), also mit θ als Polar- und ϕ als Azimutalwinkel. Wie üblich, ist c die Lichtgeschwindigkeit und $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der Schwingung. Die Terme $P^1{}_l(\cos\theta)$ sind die *zugeordneten Legendre-Polynome* mit l = 1, 2, 3, … und $m = \pm 1$.

Der Radialteil $u_l(r)$ in (1) ist die Lösung der *Besselschen Differenzialgleichung*

(2) $$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r) = 0 .$$

Wie oben erwähnt, erfordern die Randbedingungen, dass E_θ auf den Kugeln mit den Radien a und b verschwindet. Sie werden damit zu

(3) $$\left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}\right|_{r=b} = 0 .$$

In unserem Fall ist h klein gegenüber a, so dass gilt $b \cong a$. Das erlaubt es, in der Näherungslösung die Variable r in der eckigen Klammer von (2) durch den konstanten Wert a zu ersetzen. Aus (2) wird damit die Gleichung einer harmonischen Schwingung, so dass man für die Lösung

(4) $$u_l(r) = A\cos(kr) + B\sin(kr)$$

ansetzen kann ($k = \omega/c$). Mit diesem Ansatz lassen sich die Randbedingungen (3) in einfacher Weise formulieren. Für die Frequenzen der niedrigsten Schwingungsmoden erhält man dann[1]

(5) $$\omega_l = \frac{c}{a}\sqrt{l(l+1)}$$

mit l = 1, 2, 3,… . Für $l = 1$ ist das eine Frequenz von etwa 10 Hz.

Nun zu den exakten Lösungen von (2). Sie lauten

(6) $$u_l(kr) = A\,kr\,h_l^{(1)}(kr) + B\,kr\,h_l^{(2)}(kr) .$$

Dabei sind $h_l^{(1,2)}(kr)$ die beiden *sphärischen Hankelfunktionen*[3]. Das Produkt *kr* kürzen wir ab zu

$$kr \;=\; x \;.$$

Die Konstanten *A* und *B* interessieren hier nicht, sie werden durch die Randbedingungen für $u_l(r)$ festgelegt. Die Frequenzen, die wir berechnen wollen, folgen dagegen aus den Randbedingungen (3) für die *Ableitung* der Lösung. Diese ist

$$(7)\qquad \frac{\partial u_l(x)}{\partial x} \;=\; A\left[h_l^{(1)}(x) \;+\; x\frac{\partial h_l^{(1)}(x)}{\partial x}\right] \;+\; B\left[h_l^{(2)}(x) \;+\; x\frac{\partial h_l^{(2)}(x)}{\partial x}\right] .$$

Die Mathematik liefert[3]

$$\frac{\partial h_l^{(1,2)}(x)}{\partial x} \;=\; h_{l-1}^{(1,2)}(x) \;-\; \frac{l+1}{x}h_l^{(1,2)}(x) \;.$$

Damit wird aus (7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_l(x)}{\partial x} \;&=\; A\left[h_l^{(1)}(x) \;+\; x\;h_{l-1}^{(1)}(x) \;-\; (n+1)\;h_l^{(1)}\right] \;+\; B\left[h_l^{(2)}(x) \;+\; x\;h_{l-1}^{(2)}(x) \;-\; (n+1)\;h_l^{(2)}\right]\\ &=\; A\left[-n\,h_l^{(1)}(x) \;+\; x\;h_{l-1}^{(1)}(x)\right] \;+\; B\left[-n\,h_l^{(2)}(x) \;+\; x\;h_{l-1}^{(2)}(x)\right].\end{aligned}$$

Die sphärischen Hankelfunktionen drücken wir jetzt durch die *Hankelfunktionen* $H_{l\pm 1/2}^{(1,2)}$ aus:

$$h_l^{(1,2)}(x) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H_{l\,\pm\,1/2}^{(1,2)}(x) \;.$$

Das ergibt

$$(8)\qquad \frac{\partial u_l(x)}{\partial x} \;=\; -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left[A\left(n\,H_{l+1/2}^{(1)}(x) \;-\; x\,H_{l-1/2}^{(1)}(x)\right) \;+\; B\left(n\,H_{l+1/2}^{(2)}(x) \;-\; x\,H_{l-1/2}^{(2)}(x)\right)\right]$$

Kürzt man wie bei Schumann [Schu52] ab

$$F^{(1,2)}(x) \;=\; n\,H_{l+1/2}^{(1,2)}(x) \;-\; x\,H_{l-1/2}^{(1,2)}(x) \;,$$

dann ist

$$(9)\qquad \frac{\partial u_l(x)}{\partial x} \;=\; -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left[A\,F^{(1)}(x) \;+\; B\,F^{(2)}(x)\right]$$

Und die Randbedingungen (3) werden zu

$$(10)\qquad \begin{aligned} A\,F^{(1)}(ka) \;+\; B\,F^{(2)}(ka) \;&=\; 0\\ A\;F^{(1)}(kb) \;+\; B\,F^{(2)}(kb) \;&=\; 0\end{aligned} \;.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$B \;=\; -\frac{F^{(1)}(ka)}{F^{(2)}(ka)}A \;.$$

Damit wird die zweite Gleichung zu

$$A\;F^{(1)}(kb) \;-\; \frac{F^{(1)}(ka)}{F^{(2)}(ka)}A\,F^{(2)}(kb) \;=\; 0$$

oder

$$(11)\qquad F^{(1)}(kb)\;F^{(2)}(ka) \;-\; F^{(1)}(ka)\,F^{(2)}(kb) \;=\; 0 \;.$$

Wir verwenden auch hier die Näherung, dass $h = b - a$ klein ist gegenüber *a* und *b*, und schreiben

$$F^{(1,2)}(ka) \ = \ F^{(1,2)}(kb) \ - \ \frac{\partial F^{(1,2)}(kb)}{\partial(kb)}(kb - ka) \ = \ F^{(1,2)}(kb) \ - \ \frac{\partial F^{(1,2)}(kb)}{\partial(kb)}\, kb\, \frac{b-a}{b} .$$

Das setzen wir in (15) ein und erhalten

$$F^{(1)}(kb)\left[F^{(2)}(kb) \ - \ \frac{\partial F^{(2)}(kb)}{\partial(kb)}\, kb\, \frac{b-a}{b}\right] - \left[F^{(1)}(kb) \ - \ \frac{\partial F^{(1)}(kb)}{\partial(kb)}\, kb\, \frac{b-a}{b}\right] F^{(2)}(kb) \ = \ 0$$

oder

$$(12) \qquad - F^{(1)}(kb)\frac{\partial F^{(2)}(kb)}{\partial(kb)} \ + \ \frac{\partial F^{(1)}(kb)}{\partial(kb)} F^{(2)}(kb) \ = \ 0 \ .$$

Wir greifen wiederum auf die Mathematik zurück, sie liefert

$$\frac{\partial F^{(1,2)}(kb)}{\partial(kb)} \ = \ \left[kb \ - \ \frac{l(l \ + \frac{1}{2})}{kb}\right] H^{(1,2)}_{l+1/2}(kb) \ - \ \frac{1}{2}\, H^{(1,2)}_{l-1/2}(kb) \ .$$

Damit wird (16) zu

$$- F^{(1)}(kb)\left\{\left[kb \ - \ \frac{l(l \ + \frac{1}{2})}{kb}\right] H^{(2)}_{l+1/2}(kb) \ - \ \frac{1}{2}\, H^{(2)}_{l-1/2}(kb)\right\}$$
$$+ \left\{\left[kb \ - \ \frac{l(l \ + \frac{1}{2})}{kb}\right] H^{(1)}_{l+1/2}(kb) \ - \ \frac{1}{2}\, H^{(1)}_{l-1/2}(kb)\right\} F^{(2)}(kb) \ = \ 0$$

und weiter zu

$$-\left\{n\, H^{(1)}_{l+1/2}(kb) - kb\, H^{(1)}_{l-1/2}(kb)\right\}\left\{\left[kb - \frac{l(l \ + \frac{1}{2})}{kb}\right] H^{(2)}_{l+1/2}(kb) - \frac{1}{2}\, H^{(2)}_{l-1/2}(kb)\right\}$$
$$+ \left\{\left[kb - \frac{l(l \ + \frac{1}{2})}{kb}\right] H^{(1)}_{l+1/2}(kb) - \frac{1}{2}\, H^{(1)}_{l-1/2}(kb)\right\}\left\{n\, H^{(2)}_{l+1/2}(kb) - kb\, H^{(2)}_{l-1/2}(kb)\right\} = \ 0$$

Mit etwas Geduld multiplizieren wir die Klammern aus. Das ergibt

$$\begin{aligned}
&- \underline{n(kb) H^{(1)}_{l+1/2}(kb) H^{(2)}_{l+1/2}(kb)} \ + \ \underline{\frac{l^2(l + \frac{1}{2})}{kb} H^{(1)}_{l+1/2}(kb) H^{(2)}_{l+1/2}(kb)} \ + \ \frac{l}{2} H^{(1)}_{l+1/2}(kb) H^{(2)}_{l-1/2}(kb) \\
&+ (kb)^2\, H^{(1)}_{l-1/2}(kb) H^{(2)}_{l+1/2}(kb) \ - \ l(l + \tfrac{1}{2}) H^{(1)}_{l-1/2}(kb) H^{(2)}_{l+1/2}(kb) \ - \ \underline{\frac{1}{2}(kb) H^{(1)}_{l-1/2}(kb) H^{(2)}_{l-1/2}(kb)} \\
&+ \underline{n(kb) H^{(2)}_{l+1/2}(kb) H^{(1)}_{l+1/2}(kb)} \ - \ \underline{\frac{l^2(l + \frac{1}{2})}{kb} H^{(2)}_{l+1/2}(kb) H^{(1)}_{l+1/2}(kb)} \ - \ \frac{l}{2} H^{(2)}_{l+1/2}(kb) H^{(1)}_{l-1/2}(kb) \\
&- \ (kb)^2 H^{(2)}_{l-1/2}(kb) H^{(1)}_{l+1/2}(kb) \ + \ l(l + \tfrac{1}{2}) H^{(2)}_{l-1/2}(kb) H^{(1)}_{l+1/2}(kb) \ + \ \underline{\frac{1}{2}(kb) H^{(2)}_{l-1/2}(kb) H^{(1)}_{l-1/2}(kb)} \ = \ 0
\end{aligned} \quad .$$

Die untereinander stehenden, unterstrichenen Terme heben sich jeweils weg. Aus den übrig gebliebenen lässt sich die Summe

$$H^{(2)}_{l+1/2}(kb) H^{(1)}_{l-1/2}(kb) \ - \ H^{(1)}_{l+1/2}(kb) H^{(2)}_{l-1/2}(kb)$$

ausklammern. Damit folgt

$$(13) \qquad \left[-\frac{l}{2} \ + \ (kb)^2 \ - \ l(l + \frac{1}{2})\right]\left[H^{(2)}_{l+1/2}(kb) H^{(1)}_{l-1/2}(kb) \ - \ H^{(1)}_{l+1/2}(kb) H^{(2)}_{l-1/2}(kb)\right] \ = \ 0 \ .$$

Diese Gleichung muss für alle Werte von kb gelten. Das ist nur dann der Fall, wenn die linke Klammer verschwindet. Wenn also gilt

$$-\frac{l}{2} + (kb)^2 - l(l + \frac{1}{2}) = 0$$

oder

$$(kb)^2 = \frac{l}{2} + l(l + \frac{1}{2}) = l(l + 1) \ .$$

Mit $k = \omega/c$ folgt dann

(14) $$\omega = \frac{c}{b}\sqrt{l(l + 1)} \ .$$

Da $b \cong a$, ist dies dasselbe Ergebnis wie im Fall der Rechnung mit dem Ansatz

$$u_l(r) = A\cos(kr) + B\sin(kr) ,$$

der in (4) gemacht wird. Das ist in gewisser Weise erstaunlich.

Anmerkungen

[1] Vorlesungsskript Prof. *Steven Errede*, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, 2005-2011 [Err 11], siehe auch eigene Rechnung.

[2] Schumann [Schu 52] benutzt die exakten Lösungen der *Besselschen Gleichung* (2) und schätzt anhand dieser den Einfluss der endlichen Leitfähigkeit der Ionosphäre ab.

[3] z. B. *L. Råde und B. Westergren, Springers Mathematische Formeln* [RadW 96]

Literatur

Err 11 — **web.hep.uiuc.edu/home/serrede/P436/Lecture_Notes/P436_Lect_10.pdf**

NN 13 — Gefunden im Web unter **space.fmi.fi/~viljanea/eds2005/eds2005_6.pdf**

RadW 96 — L. *Råde und B. Westergren*, *Springers Mathematische Formeln*, Springer, Berlin 1996

Schu 52 — Schumann W. O. (1952): Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist. Zeitschrift und Naturforschung **7a**: 149–154. Bibcode:1952ZNatA...7..149S.