

1. Grundlagen, Messmethode

Beim Aufprall schneller Elektronen auf ein metallisches Anodenmaterial (hier: Kupfer) entsteht Röntgenstrahlung. Diese wird nach der Drehkristallmethode spektral zerlegt. Abbildung 1a) zeigt eine schematische Skizze der Versuchsanordnung¹. Die Elektronen werden durch Glühemission in einer Röntgenröhre erzeugt und durch eine hohe Anodenspannung ($U = 10 \dots 25 \text{ kV}$) auf die Kupfer-Anode hin beschleunigt. Dort entsteht die Röntgenstrahlung. Die (Blei-)Abschirmung der Röhre ist an einer Stelle unterbrochen, dort tritt die Strahlung durch eine schmale Bohrung (Kollimator) aus. Sie trifft als Strahl mit wohldefinierter Richtung auf einen Einkristall (hier ein LiF -Kristall), an dem sie gestreut wird. Die gestreuten Röntgenquanten werden in einem Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen, das sich auf einem Kreis um den LiF -Kristall herumschwenken lässt. Auf diese Weise kann die Winkelverteilung der gestreuten Röntgenstrahlung gemessen werden. Aus der Winkelverteilung ergibt sich die spektrale Verteilung der Strahlung, denn Streuwinkel und Wellenlänge sind durch die *Bragg'sche Gleichung* miteinander verknüpft. Abbildung 1b) dient zur Erläuterung dieser Gleichung.

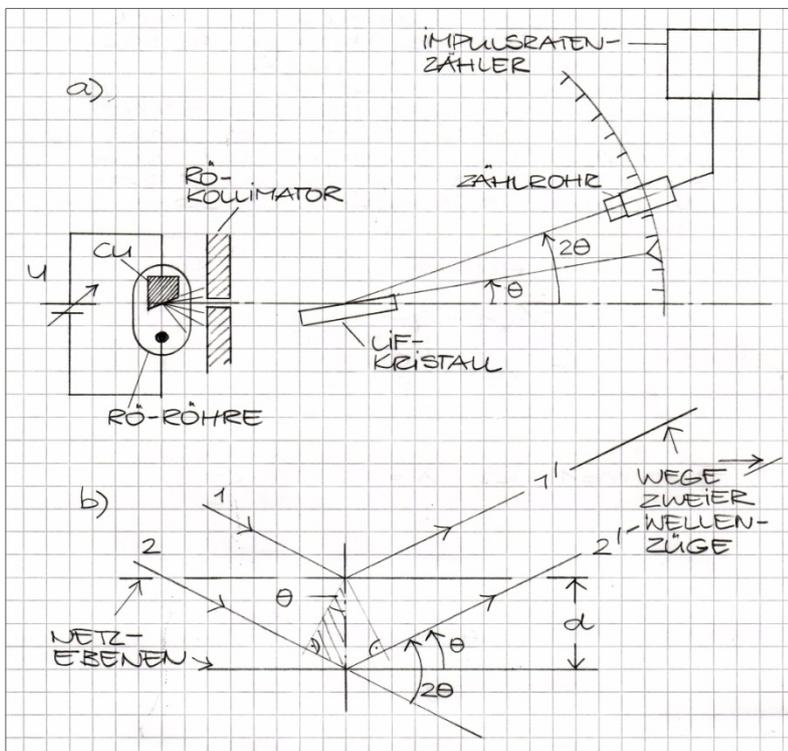


Abbildung 1

a) Versuchsanordnung der Drehkristallmethode zur spektralen Zerlegung des an der Kupferanode (Cu) entstehenden Röntgenlichts (schematische Skizze). Das Röntgenlicht wird kollimiert und an den Netzebenen eines LiF -Kristalls nach dem Reflexionsgesetz gestreut. Dabei interferieren Wellenzüge, die von verschiedenen Netzebenen reflektiert werden, untereinander - je nach ihrem Gangunterschied. Die Winkel, unter denen die Interferenzmaxima erscheinen (genannt Glanzwinkel), sind mit der Wellenlänge der Röntgenstrahlung durch die Bragg'sche Gleichung verknüpft.

b) Skizze zur Berechnung des Gangunterschieds von Wellenzügen, die an benachbarten Netzebenen gestreut werden.

Zum Verständnis der Bragg'schen Gleichung muss man wissen, dass nicht nur eine Netzebene, sondern viele dieser Ebenen zur Streuung des Röntgenlichts beitragen. An jeder dieser Ebenen kommt das Reflexionsgesetz der Optik zur Anwendung: Ein unter dem Winkel θ einfallender Strahl wird unter demselben Winkel zurückgeworfen. Wegen der vielen Ebenen, die zur Streuung

beitragen, kommt ein weiteres wellenoptisches Phänomen hinzu: Es entstehen Gangunterschiede zwischen den Wellenzügen, die an unterschiedlichen Netzebenen reflektiert werden. Sie hängen ab vom Einfallswinkel θ und vom Abstand d benachbarter Ebenen. Um diese Gangunterschiede zu berechnen, genügt es, die Reflexionen an *benachbarten* Ebenen zu betrachten. Denn die Gangunterschiede der an weiter entfernten Ebenen reflektierten Wellenzüge sind Vielfache des Gangunterschieds zwischen benachbarten Ebenen – der Abstand d benachbarter Ebenen ist nämlich konstant. Aus Abbildung 1b) geht hervor, dass der Gangunterschied zwischen benachbarten Ebenen – also der Wegunterschied zwischen den Wellenzügen 1' und 2' – gegeben ist durch $2d \sin\theta$. Das ist das Doppelte der kleineren Kathete im schraffierten Dreieck. Ist dieser Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ des Röntgenlichts, überlagern sich die Amplituden der beiden Wellenzüge konstruktiv und führen zu einem Maximum der Intensität. Für dieses Intensitätsmaximum gilt also

$$(1) \quad 2d \sin\theta = m\lambda \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Dies ist die *Bragg'sche Gleichung*. Dabei ist m die Ordnung des Spektrums; in der Regel wird in erster Ordnung ($m = 1$) beobachtet. Ist d bekannt, kann man mit Hilfe dieser Gleichung den Wert von θ in die zugehörige Wellenlänge λ umrechnen. Für den *LiF*-Kristall ist $d = 201 \text{ pm}$, so dass die Umrechnungsformel im vorliegenden Experiment ($m = 1$) lautet

$$(2) \quad \lambda = 402 \text{ pm} \cdot \sin\theta.$$

Bei der Drehkristallmethode werden Detektor (Geiger-Müller-Zähler) und Kristall immer so ausgerichtet, dass der Detektor die Netzebenen unter genau dem Winkel θ „betrachtet“, unter dem der Röntgenstrahl auf der Einfallseite auftrifft (Abbildung 1a). Die Reflexionsbedingung ist daher bei jeder Detektor- und Kristallorientierung erfüllt.

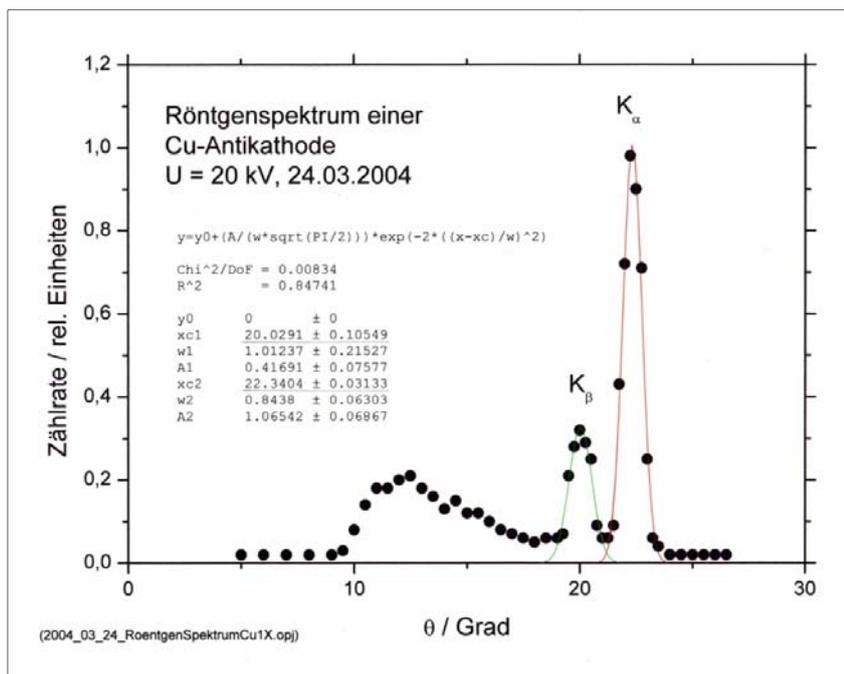


Abbildung 2 Röntgenspektrum einer Kupferanode (Anodenspannung 20 kV). Das breite, bei ca. 9° endende Kontinuum ist die spektrale Verteilung der Strahlung, die beim Abbremsen der Elektronen in der Anode entsteht (Bremsstrahlung). Die beiden Linien entsprechen atomaren Übergängen im Kupfer. Sie kommen dadurch zustande, dass Elektronen aus der K-Schale des Kupfers herausgeschlagen werden, deren Lücken durch atomare Übergänge aus höheren Schalen aufgefüllt werden, siehe Text. An die Linien wurde je eine Gaußkurve angepasst.

Abbildung 2 zeigt das Spektrum von Kupfer bei der Anodenspannung $U = 20 \text{ kV}$. Das Spektrum besteht aus zwei Anteilen: einem kontinuierlichen Anteil und zwei „Linien“. Der kontinuierliche Anteil entsteht durch das Abbremsen der Elektronen in der Anode. Nach den Gesetzen der Elektrodynamik sendet jede beschleunigte oder abgebremste Ladung elektromagnetische Strahlung aus. Diese so genannte *Bremsstrahlung* enthält Wellenlängen bis zu einer unteren Grenze λ_0 , entsprechend Winkeln bis zu einem kleinsten Wert θ_0 . In Abbildung 2 ist beispielsweise $\theta_0 = 9,0^\circ$. Mit Hilfe von Gl. (1) folgt daraus $\lambda_0 = 62,9 \text{ pm}$. Messungen bei anderen Anodenspannungen zeigen, dass die Grenzwellenlänge λ_0 mit wachsendem U kleiner wird.

Die beiden Linien haben ihre Ursache darin, dass Elektronen aus der *K*-Schale (Hauptquantenzahl $n = 1$) des Kupferatoms von den auf die Anode auffallenden Elektronen herausgeschlagen werden. Die dadurch entstehende Lücke wird durch Elektronen des Kupfer-Atoms mit höherer Energie aufgefüllt. Diese Elektronen entstammen den Niveaus mit den Quantenzahlen $n = 2$ und $n = 3$ (*L*- bzw. *M*-Schale). Sie senden beim Übergang in den Grundzustand ($n = 1$) ein Quant aus, dessen Energie gleich der Energiedifferenz der Niveaus ist, zwischen denen der Übergang stattfindet. Diese „Linien“-Strahlung heißt auch *charakteristische Strahlung*. Die Linie, die dem Übergang von $n = 2$ nach $n = 1$ entspricht, wird üblicherweise als K_α -Linie bezeichnet. (Im Wasserstoff-Atom wäre das die *Lyman- α* -Linie). Im Fall des Kupfers, das heißt im vorliegenden Experiment, tritt sie *unabhängig* von der Anodenspannung bei einem Winkel von $22,3^\circ$ auf. Die mit K_β bezeichnete Linie bei $20,0^\circ$ entspricht dem Übergang von $n = 3$ in den Grundzustand $n = 1$.

2. Auswertung

2.1 Grenzwellenlänge, Planck'sche Konstante

Ein Röntgenspektrum lässt sich in vielerlei Hinsicht auswerten. Wir beschränken uns darauf, die im Schulunterricht üblicherweise betrachteten Parameter zu untersuchen. Im Fall des Kontinuums ist das dessen kurzwellige Grenze λ_0 . Sie hängt, wie gesagt, von der Anodenspannung U ab. Das Ergebnis einer Messung für einige Werte von U ($12,5 \text{ kV} \leq U \leq 25 \text{ kV}$) zeigt Tabelle 1. Die Grenzwinkel wurden mit Hilfe von Gl. (2), $\lambda_0 = 402 \text{ pm} \cdot \sin\theta_0$, in Grenzwellenlängen umgewandelt.

Tabelle 1 Grenzwinkel θ_0 und Grenzwellenlänge λ_0 in Abhängigkeit von der Anodenspannung U .

U / kV	θ_0 / Grad	λ_0 / pm	U^{-1} / kV^{-1}
12,5	$14,5 \pm 1,0$	$100,7 \pm 7,0$	0,0800
15,0	$11,5 \pm 0,8$	$80,1 \pm 5,3$	0,0667
17,5	$9,5 \pm 0,5$	$66,3 \pm 3,5$	0,0571
20,0	$9,0 \pm 0,5$	$62,9 \pm 3,7$	0,0500
22,5	$7,5 \pm 0,5$	$52,5 \pm 3,5$	0,0444
25,0	$6,3 \pm 0,5$	$43,8 \pm 3,6$	0,0400

Die Abhängigkeit der Grenzwellenlänge von der Anodenspannung folgt aus der Quantennatur des (Röntgen-)Lichts und dem Energieerhaltungssatz. Wir betrachten zunächst die kinetische Energie der Elektronen in der Röntgenröhre, und zwar beim Auftreffen auf der Kupfer-Anode. Die Elektronen wurden vorher durch die Spannung U beschleunigt und haben daher beim Aufprall auf die Anode ihre potentielle Energie eU am Ort der Kathode vollständig in kinetische Energie umgewandelt ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, Elementarladung). Im Extremfall kann diese Energie auf ein einziges (Bremsstrahlungs-)Röntgenquant übertragen werden. Das Quant hat dann die Energie

$$(3) \quad hf_0 = eU,$$

wobei f_0 die Frequenz des Röntgenlichts und h die Plancksche Konstante ist. Wegen $f_0 = c/\lambda_0$ mit c als Lichtgeschwindigkeit folgt

$$(4) \quad \lambda_0 = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U} .$$

Das heißt, die Grenzwellenlänge λ_0 ist umgekehrt proportional zur Beschleunigungsspannung U mit dem Proportionalitätsfaktor hc/e . Abbildung 3 bringt die Verknüpfung der beiden Größen zum Ausdruck. Aufgetragen sind die Messwerte von λ_0 (Tabelle 1) als Funktion von $1/U$. Die Punkte

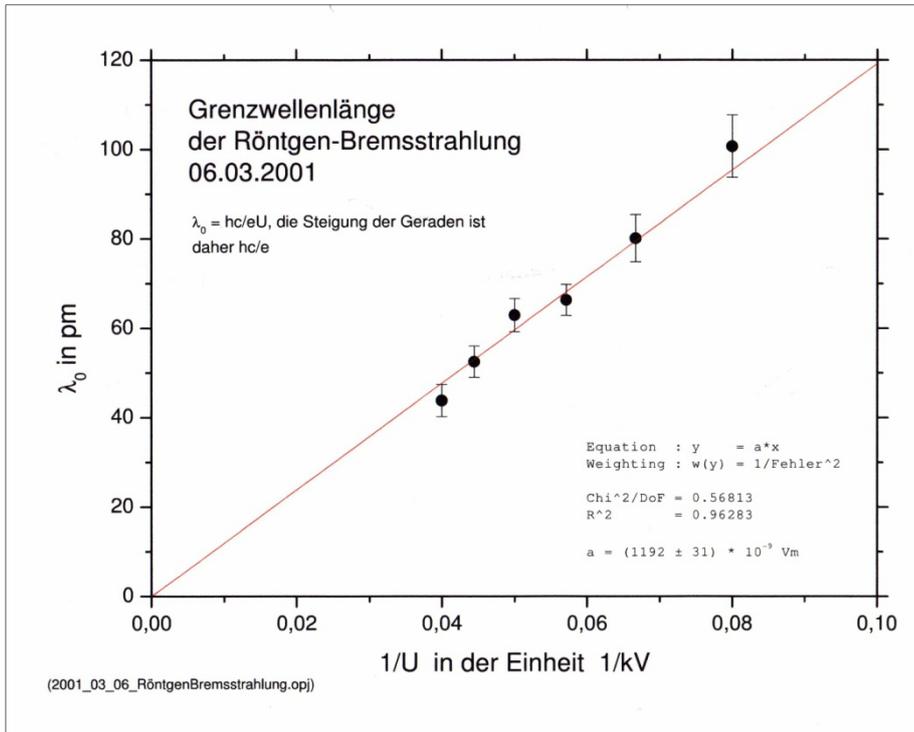


Abbildung 3 Grenzwellenlänge λ_0 in Abhängigkeit vom Kehrwert der Beschleunigungsspannung U . Aus der Steigung der Geraden folgt für die Plancksche Konstante $h = (6,36 \pm 0,17) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

liegen, wie erwartet, auf einer Geraden durch den Nullpunkt. Die Ausgleichsgerade hat die Steigung $(1192 \pm 31) \cdot 10^{-9} \text{ Vm}$. Daraus folgt für die Plancksche Konstante

$$(5) \quad h = \frac{(1192 \pm 31) \cdot 10^{-9} \text{ Vm} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = (6,36 \pm 0,17) \cdot 10^{-34} \text{ Js} .$$

Der angegebene Fehler berücksichtigt nur die Streuung der Punkte um die Ausgleichsgerade ($\chi^2/\text{Freiheitsgrad} = 0,57$). Als systematischer Fehler geht (mindestens) die Ungenauigkeit der Winkeljustierung ein. Schätzt man sie ab zu $\pm 1^\circ$, kommt ein Anteil von der Größenordnung $\pm 5\%$ hinzu. Das ergibt einen Gesamtfehler von $\pm 0,49 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Also wird als Messwert angegeben

$$h = (6,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-34} \text{ Js} .$$

Er ist innerhalb der Fehlergrenzen mit dem Literaturwert $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ verträglich.

2.2 K_α - und K_β -Linie, Ordnungszahl von Cu

Die beiden Linien (K_α - und K_β -Linie) sind, wie der Name „charakteristische Strahlung“ andeutet, kennzeichnend für das Anodenmaterial. Ihre Wellenlängen hängen von der Ordnungszahl Z des Anodenmaterials ab. Im vorliegenden Fall (Kupfer) ist $Z = 29$, die Ordnungszahl also bekannt. Wir prüfen deshalb nach, ob die gemessenen Wellenlängen λ mit der Annahme $Z = 29$ kompatibel sind.

Dazu rechnen wir die Messwerte von λ in die entsprechenden Übergangsenergien ΔW um. Die Umrechnung erfolgt nach Gleichung

$$(6) \quad \Delta W = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 197,32 \text{ eV nm}}{\lambda}$$

mit $\hbar = h/2\pi$. Theoretisch lässt sich die Übergangsenergie ohne viel Quantenmechanik nach dem *Bohr'schen Atommodell* berechnen. Danach gilt für den Übergang zwischen Niveaus mit den Hauptquantenzahlen n_1 und n_2 ($n_2 > n_1$)

$$(7) \quad \Delta W(n_2 \rightarrow n_1) = -\frac{1}{2}(Z-1)^2 \alpha^2 mc^2 \left[\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right]$$

mit $\alpha = 1/137,036$ (Feinstrukturkonstante) und $mc^2 = 511 \text{ keV}$ (Ruhmasse des Elektrons). Das Produkt $\alpha^2 mc^2/2$ hat dabei den (bekannten) Zahlenwert $13,60 \text{ eV}$, und die Klammer ergibt für den Übergang ($n_2 = 2$) \rightarrow ($n_1 = 1$), dem die K_α -Linie entspricht, den Faktor $-3/4$. Damit wird aus Gl. (7) die Zahlenwertformel

$$(8) \quad \Delta W(K_\alpha) = 10,204 \text{ eV} (Z-1)^2.$$

Diese Gleichung ist auch unter dem Namen *Moseley'sches Gesetz* bekannt. Die „ -1 “, mit der die Ordnungszahl Z korrigiert wird, rührt daher, dass die K -Schale zwei Elektronen enthält und nach dem Herausschlagen des einen Elektrons das verbleibende den Kern abschirmt. Die effektive Kernladung ist daher $Z-1$. Für die K_β -Linie erhält man mit ($n_2 = 3$) \rightarrow ($n_1 = 1$)

$$(9) \quad \Delta W(K_\beta) = 12,089 \text{ eV} (Z-1)^2.$$

Setzt man in diese Formeln die entsprechenden Messwerte für ΔW ein, folgt ein Ausdruck für Z , den man nach dieser Größe auflösen kann. Das soll am Beispiel der Messung für $U = 20 \text{ kV}$ gezeigt werden. Die Messwerte sind in Tabelle 2 aufgeführt. Dabei wurden die Wellenlängen wiederum nach Gl. (2) aus den Werten für θ berechnet.

Tabelle 2 Winkel θ , Wellenlänge λ und Energie ΔW der charakteristischen Strahlung (K_α - und K_β -Linie)

Linie	θ / Grad	λ / pm	ΔW / keV
K_α	$22,34 \pm 0,03$	$152,8 \pm 0,2$	$8,114 \pm 0,011$
K_β	$20,03 \pm 0,11$	$137,7 \pm 0,8$	$9,003 \pm 0,052$

Für die K_α -Linie ergibt sich aus Gl. (8)

$$Z = \sqrt{\frac{8,114 \cdot 10^3 \text{ eV}}{10,204 \text{ eV}}} + 1 = 29,2.$$

Dieser Wert ist mit dem theoretischen $Z = 29$ verträglich. Für die K_β -Linie folgt mit Hilfe von Gl. (9) als gemessene Ordnungszahl $Z = 28,3$ – innerhalb des Messfehlers möglicherweise noch mit dem theoretischen Wert kompatibel. Der Fehler lässt sich jedoch nicht zuverlässig abschätzen.

Insgesamt betrachtet liefert das Experiment keine völlig unvernünftigen Werte: Die Wellenlängen der charakteristischen Linien sind grob verträglich mit der Ordnungszahl der Kupfer-Anode, und die Plancksche Konstante scheint nicht, wie beim Versuch zum Fotoeffekt, mit einem systematischen Fehler behaftet zu sein.

Anmerkungen

¹ Das damals (2004) verwendete Röntgengerät (Fa. Phywe) ist, soweit mir bekannt, heute nicht mehr zugelassen. Die Lehrmittelindustrie stellt jedoch weiterhin Geräte zur Verfügung, die den aktuellen Strahlenschutzbestimmungen entsprechen.