Die Resonanzkurve eines Federpendels zu messen ist im Prinzip einfach. Trotzdem kommt man um einen gewissen Aufwand nicht herum. Mein Vorschlag ist die nachfolgende Apparatur. Sie liefert „schöne“ Resonanzkurven und plausible Ergebnisse. Doch zunächst einige Erläuterungen zur Physik – Verzeihung, wenn das alles bekannt ist:

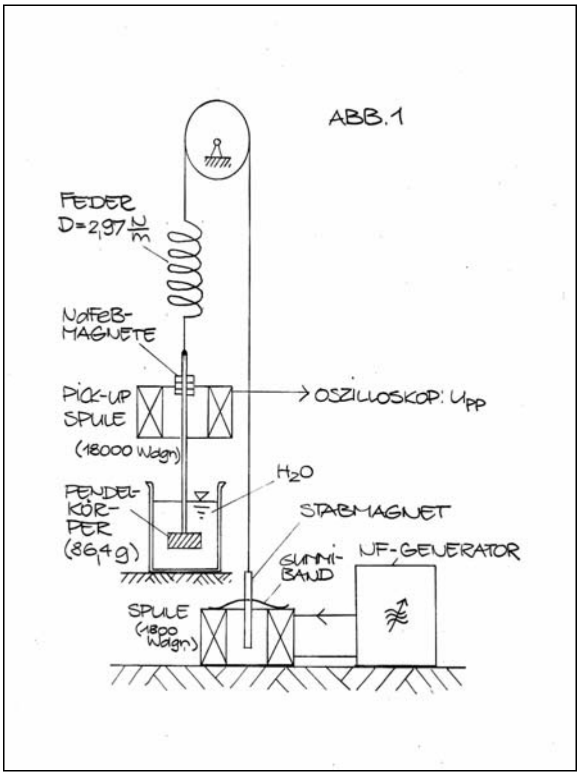

Abb. 1 Messanordnung schematisch

Hängt man ein Gewichtsstück an eine Schraubenfeder und bewegt das obere Ende der Feder auf und ab, so gerät das Gewichtsstück in Schwingungen. Physikalisch ausgedrückt, hat man ein *Federpendel* zu *erzwungenen Schwingungen* angeregt. Die maximale Auslenkung des Pendels, genannt *Amplitude*, hängt davon ab, wie oft das obere Ende der Feder pro Sekunde auf und ab bewegt wird. Eine Zahl, die angibt, wie oft pro Sekunde sich ein Vorgang wiederholt, heißt in der Physik *Frequenz*. Hier nennt man sie die *Erregerfrequenz.* Sie bestimmt also, wie groß die Amplitude des Pendels ist. Den Schwingungszustand mit der größten Amplitude bezeichnet man als *Resonanz*, die zugehörige Erregerfrequenz heißt *Resonanzfrequenz*. Bei erzwungenen Schwingungen interessiert in der Regel, wie sich die Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz verändert – vor allem in der Umgebung der Resonanzfrequenz. Der Verlauf der Amplitude als Funktion der Erregerfrequenz wird *Resonanzkurve* genannt. Auch die *Phasendifferenz* zwischen der Erregerschwingung und der Schwingung des Pendels ist von der Erregerfrequenz abhängig. Bei Resonanz eilt die Erregung der Pendelschwingung um 90° voraus.

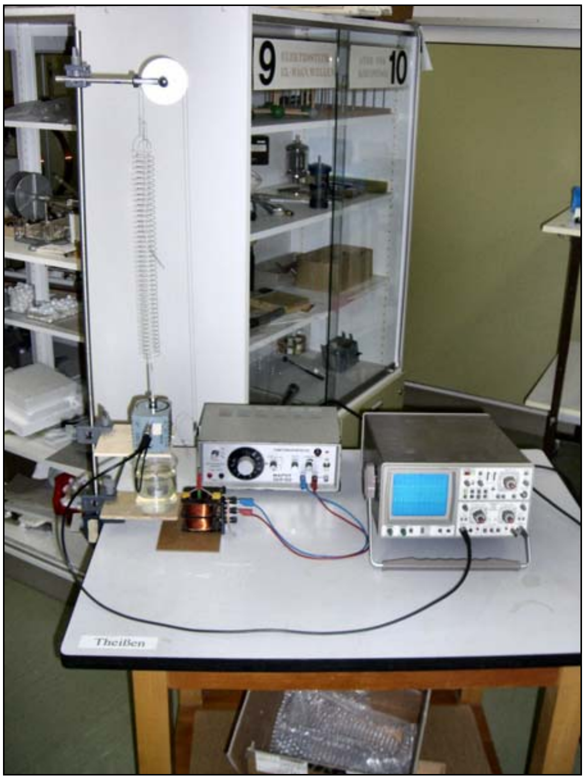

Abb. 2 Messanordnung

Abbildung 1 zeigt das Schema der Versuchsanordnung, Abbildungen 2 und 3 den tatsächlichen Aufbau. Der Pendelkörper (das Gewichtsstück) befindet sich am unteren Ende einer dünnen Aluminiumstange und bewegt sich vollständig unter Wasser. Dadurch wird die Schwingung so *gedämpft*, dass ihre Amplitude auf etwa 10 cm beschränkt bleibt. Am oberen Ende der Stange ist die Schraubenfeder befestigt. Sie hängt an einem Faden, der durch eine (feste) Rolle nach unten umgelenkt wird. An dem dortigen Ende des Fadens ist ein kleiner Stabmagnet befestigt. Dieser wird durch ein Gummiband in eine Spule hineingezogen, die von einem Wechselstrom niedriger Frequenz durchflossen wird. Durch die periodische Änderung der magnetischen Feldstärke in der Spule wird der Stabmagnet im Takt des Wechselstroms auf und ab bewegt. Diese Bewegung überträgt der Faden auf den Aufhängepunkt der Feder. Der Wechselstrom wird von einem Niederfrequenzgenerator mit einstellbarer Frequenz erzeugt. Dadurch wird dem Aufhängpunkt der Feder eine sinusförmige Schwingung mit definierter und veränderbarer Frequenz (*Erregerfrequenz*) aufgeprägt.

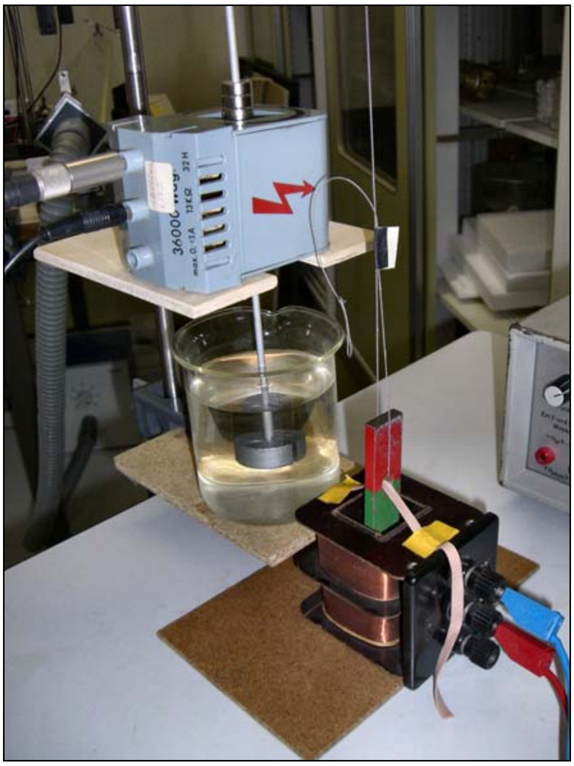

Abb. 3   Messanordnung, Detail

In der Regel beobachtet man die Resonanz, wie angedeutet, indem man die *Amplitude* des Pendels als Funktion der Erregerfrequenz misst. Dazu genügt es, mit unbewaffnetem Auge die Bewegung des Pendelkörpers vor einem Lineal mit mm-Teilung zu betrachten. Die maximalen Auslenkungen lassen sich mit einer Genauigkeit von etwa ± 1 mm ablesen. Abbildung 4 zeigt das Ergebnis einer Messung für zwei unterschiedliche Dämpfungsgrade. Die mit „schwache Dämpfung“ (ausgefüllten Kreise) bezeichneten Punkte ergaben sich für einen Pendelkörper ohne zusätzliche Dämpfungsscheibe, die „starke Dämpfung“ genannten Punkte (offene Kreise) für einen Pendelkörper mit Dämpfungsscheibe.

Eine zweite Möglichkeit, die Resonanz zu beobachten, besteht darin, die (Maximal-) Geschwindigkeit des Pendelkörpers als Funktion der Erregerfrequenz zu messen. Dazu ist die Aluminiumstange, an der unten der Pendelkörper (das Gewichtsstück) befestigt ist, weiter oben mit einem (*NdFeB*-) Magneten versehen. Der Magnet ist durch die Aluminiumstange starr mit dem Pendelkörper verbunden und bewegt sich daher im gleichen Takt wie dieser. Er taucht in eine zweite Spule („Pickup-Spule“) ein und induziert in

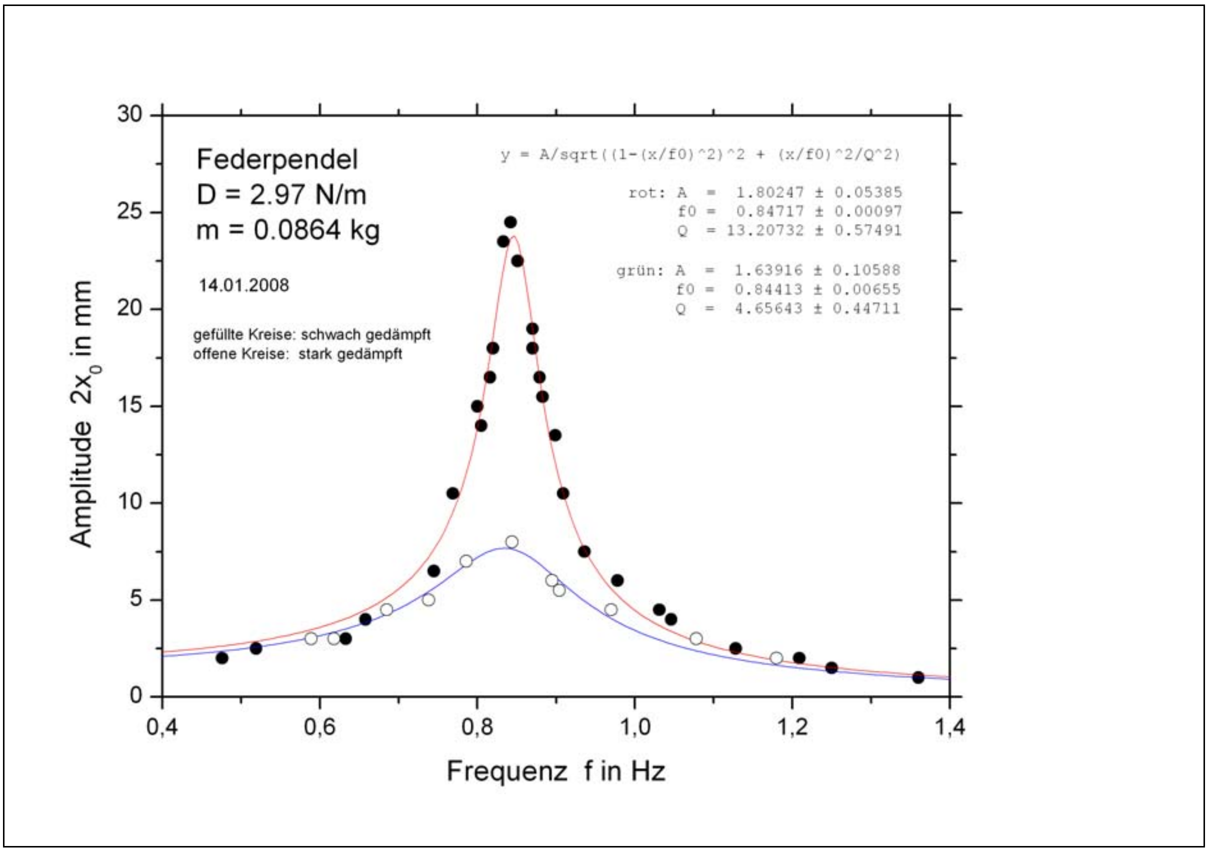

Abb. 4   Resonanzkurve, Amplitudenmessung

den Wicklungen dieser Spule eine Wechselspannung, deren zeitlicher Verlauf mit einem Oszilloskop verfolgt wird. Gemessen wird der Spitze-zu-Spitze-Wert U_{PP} dieser Spannung. Er ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich der Pendelkörper bewegt. Das Quadrat dieser Spannung U_{PP}^2 ist proportional zur *Energie*, die in der Schwingung des Pendels gespeichert ist. In Abbildung 5 ist diese Größe als Funktion von f aufgetragen, wiederum für die beiden Fälle „schwache Dämpfung“ und „starke Dämpfung“.

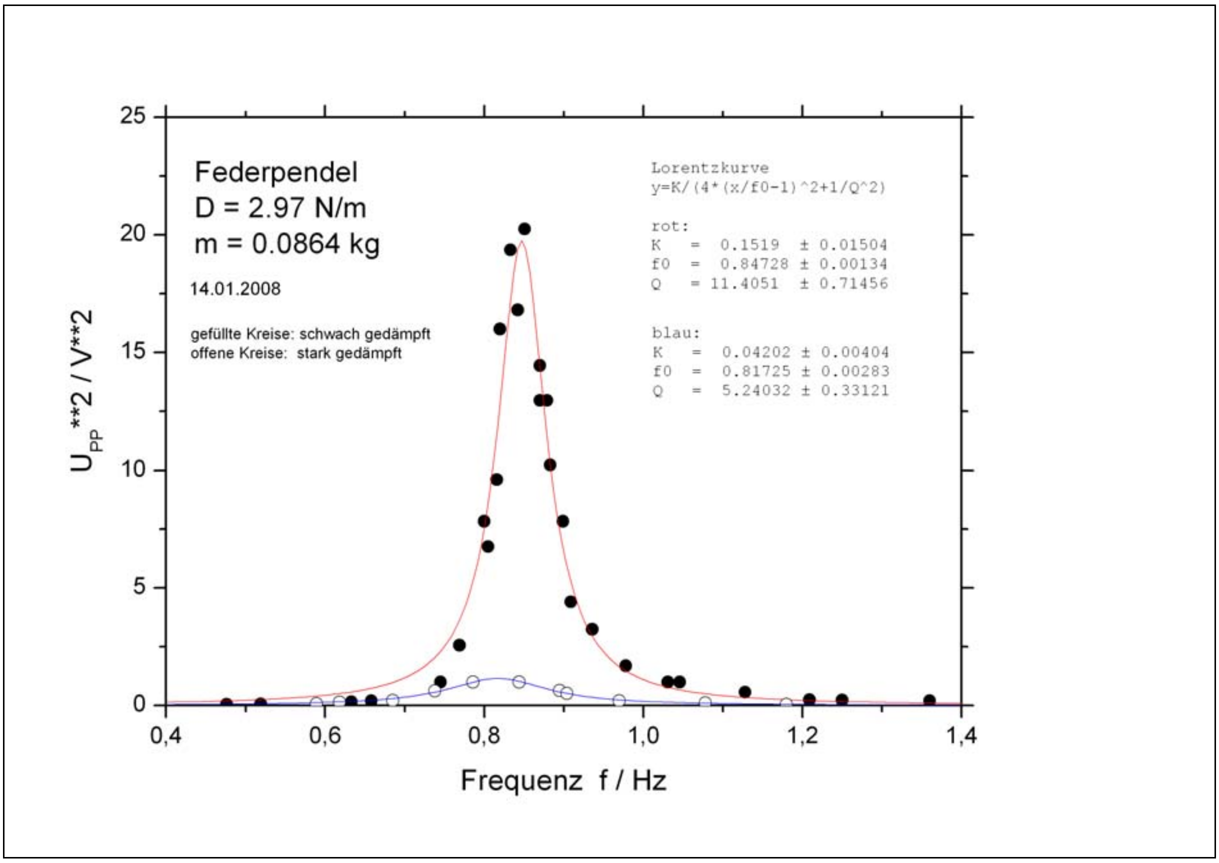

Abb. 5 Resonanzkurve, Geschwindigkeits- bzw. Energiemessung

Wie erwartet, zeigt die Amplitude $A(f)$ des Pendels (Abb. 4) ein ausgeprägtes Maximum in der Umgebung einer Frequenz f_R, genannt *Resonanzfrequenz*. Für den Verlauf der Resonanzkurve liefert die Theorie

$$(1) \qquad A(f) = \frac{A(0)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \frac{1}{Q^2}}} .$$

Dabei ist f_0 die Frequenz der freien, ungedämpften Schwingung, $A(0)$ die Amplitude bei der Erregerfrequenz Null und Q die so genannte *Güte* des Pendels. Aus dieser Gleichung folgt, dass das Maximum der Resonanzkurve an der Stelle

$$(2) \qquad f_R = f_0 \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

liegt und dass die Resonanzamplitude $A(f_R)$ gegeben ist durch

$$(3) \qquad A(f_R) = \frac{A(0)}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \cdot Q \cong A(0)\cdot Q \quad .$$

Das heißt, bei nicht allzu kleiner Güte ist die Resonanzamplitude um den Faktor Q größer als die Amplitude für $f = 0$. Die Frequenz f_0 der freien, ungedämpften Schwingung ist gegeben durch

(4) $$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} .$$

Dabei ist D die Federkonstante der Schraubenfeder und m die effektive schwingende Masse. Bei ausreichend großer Güte Q ist der Unterschied zwischen Resonanzfrequenz f_R und der Frequenz f_0 der freien Schwingung vernachlässigbar klein.

Für die (indirekte) Messung der Geschwindigkeit bzw. Energie des Pendels (Abb. 5) liefert die Theorie als Kurvenverlauf die bekannte *Lorentzkurve*. Sie ist symmetrisch zu f_0 und mit K als Anpassungsfaktor gegeben durch

(5) $$W(f) = \frac{K}{4\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2}} .$$

Ihr Maximum liegt, wie man aus dem Term auf der rechten Seite abliest, exakt bei f_0 und hat den Wert KQ^2. Bezeichnet man die Stellen, an denen die Schwingungsenergie auf die Hälfte ihres Maximalwertes abgefallen ist, mit f_1 bzw. f_2, dann gilt für deren Differenz $\Delta f = f_2 - f_1$, genannt Halbwertsbreite,

(6) $$\Delta f = \frac{f_0}{Q} .$$

Gleichungen (5) und (6) zeigen, wie f_0 und Q aus der Geschwindigkeits- bzw. Energiemessung entnommen werden können.

Vergleicht man Abbildungen 4 und 5, ist der Unterschied zwischen beiden Resonanzkurven deutlich zu sehen: Während die Kurve der Amplituden (Abb. 4) für kleine Frequenzen gegen die statische Auslenkung strebt und daher eine kleine Unsymmetrie aufweist, ist der Verlauf der Energie (Abb. 5) in guter Näherung symmetrisch zur Resonanzfrequenz. In diesem Fall ist, wie Gl. (5) zeigt, die Resonanzfrequenz im Übrigen exakt gleich der Frequenz f_0 der freien Schwingung – außerdem geht die Kurve für Frequenzen weitab von der Resonanz gegen Null. Auf diese Eigenschaft der Energiekurve haben vor allem Hermann et al. [**HerH 01**] hingewiesen. Dass die Energiekurve (Abb. 5) im Fall starker Dämpfung gegenüber der bei schwacher Dämpfung nach links verschoben ist, deutet auf einen systematischen Fehler hin.

Im Fall der Amplitudenkurve ist der Unterschied zwischen Resonanzfrequenz f_R und Frequenz f_0 der freien Schwingung nach Gl. (2) vernachlässigbar klein. Der Q-Wert ist auch im Fall der starken Dämpfung so groß (siehe unten), dass die Differenz der Frequenzen nach Gl. (2) maximal 3% beträgt. Daher kann man die Frequenz an der Stelle des Maximums der Kurve mit der Resonanzfrequenz gleichsetzen. Die Amplitudenkurve erlaubt im Übrigen eine grobe Abschätzung des Q-Wertes ohne Rückgriff auf die Halbwertsbreite. Nach Gl. (3) ist die Güte Q gleich dem Faktor, um den das Maximum der Kurve größer ist als der statische Wert, also $Q = A(f_R)/A(0)$. Für die Messung bei schwacher Dämpfung liest man aus Abb. 4 ab $A(f_R)/A(0) \cong 25/2 = 12,5$ – in Übereinstimmung mit dem Wert, der aus der Anpassung der theoretischen Kurve folgt (siehe unten).

Zur Auswertung wurden an die Messpunkte die zugehörigen theoretischen Kurven nach der Methode der kleinsten Quadrate angepasst. Dabei wurden f_0, Q und die Faktoren $A(0)$ bzw. K als Parameter variiert. Im Fall der *Amplitudenmessung* (Abb. 4) wurde eine Resonanzkurve nach Gl. (1) angepasst. Sie lieferte für die Frequenz der freien, ungedämpften Schwingung $f_0 = 0{,}847 \pm 0{,}001$ Hz und für die Güte $Q = 13{,}2 \pm 0{,}6$ bei schwacher Dämpfung und $f_0 = 0{,}844 \pm 0{,}007$ Hz bzw. $Q = 4{,}7 \pm 0{,}5$ bei starker Dämpfung. Aus den beiden Frequenzen folgt als Mittelwert $f_0 = 0{,}847 \pm 0{,}004$ Hz, wobei der Fehler möglicherweise zu klein abgeschätzt ist.

Der Wert von f_0 sollte mit dem theoretischen Wert nach Gl. (4) verglichen werden. Im vorliegenden Experiment wurde eine Feder mit der Federkonstanten D = 2,97 N/m verwendet. Nach Gl. (4) folgt daraus für die *effektive* schwingende Masse m = 0,1051 kg. Sie ist größer als die Masse des Pendelkörpers, die m_K = 0,0864 kg beträgt. Das ist plausibel, denn zusätzlich zur Masse des Pendelkörpers sind zu berücksichtigen (teilweise oder in voller Größe) die Massen von Schraubenfeder, Aluminiumstange, *NeFeB*-Magnet und die Rollenersatzmasse – außerdem ein Teil der Masse des Stabmagneten, der zum Antriebsmechanismus gehört. Eine Abschätzung der Beiträge dieser Zusatzmassen ist schwierig.

Bei der *Geschwindigkeits- bzw. Energiemessung* wurde, wie schon angedeutet, der Spitze-zu-Spitze-Wert U_{PP} der in der Pickup-Spule induzierten Wechselspannung gemessen. Das Quadrat U_{PP}^2 dieser Spannung ist proportional zur Energie des Pendels. Als Funktion der Erregerfrequenz f aufgetragen, sollte sich eine Lorentzkurve ergeben (Abb. 5). Die Anpassung einer solchen Kurve nach Gl. (5) ergibt für den Fall schwacher Dämpfung $f_0 = 0{,}847 \pm 0{,}001$ Hz und $Q = 11{,}4 \pm 0{,}7$. Im Fall starker Dämpfung erhält man $f_0 = 0{,}817 \pm 0{,}003$ Hz und $Q = 5{,}2 \pm 0{,}4$.

Tabelle 1 fasst zum Vergleich die Messwerte der beiden Verfahren (Amplituden- und Geschwindigkeits- bzw. Energiemessung) zusammen.

Tabelle 1

Größe	Messverfahren	
	Amplitude	Energie
f_0 (schwache Dämpfung)	$f_0 = 0{,}847 \pm 0{,}001$ Hz	$f_0 = 0{,}847 \pm 0{,}001$ Hz
f_0 (starke Dämpfung)	$f_0 = 0{,}844 \pm 0{,}007$ Hz	$f_0 = 0{,}817 \pm 0{,}003$ Hz
Q (schwache Dämpfung)	$Q = 13{,}2 \pm 0{,}6$	$Q = 11{,}4 \pm 0{,}7$
Q (starke Dämpfung)	$Q = 4{,}7 \pm 0{,}5$	$Q = 5{,}2 \pm 0{,}4$

Es zeigt sich, dass im Fall der schwachen Dämpfung die Frequenzen f_0 mit großer Genauigkeit übereinstimmen. Im Fall starker Dämpfung ist die Übereinstimmung bei den Q-Werten recht gut. Warum die jeweils anderen Ergebnisse Differenzen aufweisen, ließe sich erst durch weitere Messungen klären.

Von diesen Unstimmigkeiten abgesehen lässt sich der Verlauf der Messpunkte bei beiden Messungen recht gut durch die theoretischen Kurven beschreiben. Insofern darf man wohl von „schönen“ Resonanzkurven sprechen.

Literatur:

HerH 01 Herrmann, Friedrich und Holger Hauptmann, Praxis der Naturwissenschaften – Physik, **50**, S. 39 (2001)