

Nach *J. D. Jackson: From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy*¹, Physics Reports **320** (1999), 27 – 36.

Die nachfolgenden Zeilen sind eine von mir angefertigte „Ausarbeitung“ des genannten Artikels, keine Übersetzung der Originalarbeit. Ich habe versucht, *Jackson's* Artikel durch Bemerkungen, Neben- und Zwischenrechnungen *für mich* verständlich zu machen. Um keine Verwirrung zu stiften, stimmen die Bezeichnungen der physikalischen Größen mit denen des Originals überein. Alle Abbildungen wurden von mir neu erstellt, sie sind nur zum Teil mit denen der Originalarbeit identisch.

1. Strahlenoptik (Descartes und Newton), keine Dispersion

Um den Regenbogen zu erklären, genügt es, das Sonnenlicht beim Durchgang durch einen einzelnen Wassertropfen zu verfolgen. Dies wurde schon in vorwissenschaftlicher Zeit (13/14. Jahrh.) von *Dietrich von Freiberg*² erkannt und hat sich als richtig erweisen. *Dietrich* führt eigene Experimente zur Brechung und Reflexion von Lichtstrahlen durch und überträgt sie auf die Situation im Wassertropfen. Die ersten, nach heutiger Auffassung wissenschaftlichen Theorien zum Regenbogen gehen zurück auf *Descartes*³ und *Newton*⁴. Sie fußen auf den Gesetzen der Strahlenoptik. Danach werden die parallel einfallenden Sonnenstrahlen beim Eintritt in den Tropfen gebrochen (*Snellius'sches* Brechungsgesetz⁵), dann ein- oder mehrmals total reflektiert (Reflexionsgesetz) und beim Austritt wiederum gebrochen. Beim Austritt verdichten sich die Strahlen unter einem charakteristischen Winkel, so dass dort eine Brennlinie (*Kaustik*) entsteht. Die erhöhte Intensität in der Nähe dieser Brennlinie registriert das Auge als Regenbogen. Einmalige Reflexion im Innern des Tropfens führt zum Regenbogen 1. Ordnung (Hauptregenbogen), zweimalige Reflexion zum Regenbogen 2. Ordnung (Nebenregenbogen) usw. Bei der Brechung am Übergang Luft/Wasser (beim Eintritt in und Austritt aus dem Tropfen) wird das Sonnenlicht in seine Farben zerlegt, so dass sich die Brennlinien für jede Farbe etwas gegeneinander verschieben. So entstehen die Farben des Regenbogens.

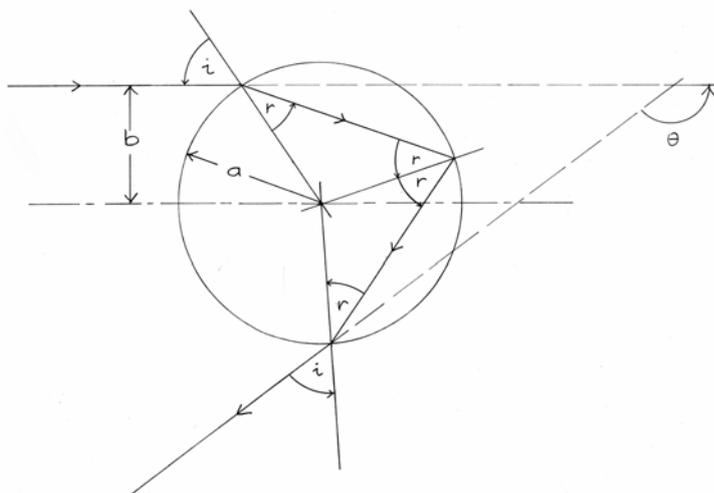


Abbildung 1 Verlauf eines Lichtstrahls in einem Wassertropfen: Brechung beim Ein- und Austritt und (einmalige) Reflexion im Innern (Hauptregenbogen)

Abbildung 1 zeigt einen Lichtstrahl beim Durchgang durch den Wassertropfen. Wir berechnen zunächst den Ablenk- oder Streuwinkel θ , unter dem der Strahl den Tropfen relativ zur

Einfallstrahl verlässt. Er hängt davon ab, in welchem Abstand vom Mittelpunkt des Tropfens der Strahl auftrifft. Dieser Abstand, genannt Einfallswinkel i oder Stoßparameter, wird hier mit b bezeichnet. Sein Maximalwert ist a , der Radius des Tropfens. In die Rechnungen geht meist der Quotient b/a ein, der hier x genannt wird. Es ist also

$$x = b/a.$$

Für die Brechung des Strahls beim Eintritt in den Tropfen ist sein Einfallswinkel i entscheidend. Er ist mit dem Brechungswinkel r , unter dem er die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser verlässt, durch das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$(1) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

verknüpft. Dabei ist n der Brechungsindex von Wasser. Der ist für die Wellenlängen der Natrium-D-Linien (589,0 nm bzw. 589,6 nm) näherungsweise $n = 4/3$. Mit diesem Wert rechnen wir. Aus der Geometrie ergibt sich⁶

$$(2) \quad \sin i = \frac{b}{a} = x, \text{ also } i = \sin^{-1}(x).$$

Damit folgt für den Brechungswinkel r

$$(3) \quad r = \sin^{-1}\left(\frac{x}{n}\right).$$

Den Ablenk- bzw. Streuwinkel θ erhalten wir, indem wir alle Winkelablenkungen des Strahls im Tropfen aufaddieren. Das sind beim Einfall ($i - r$), bei jeder Reflexion im Innern ($\pi - 2r$), und beim

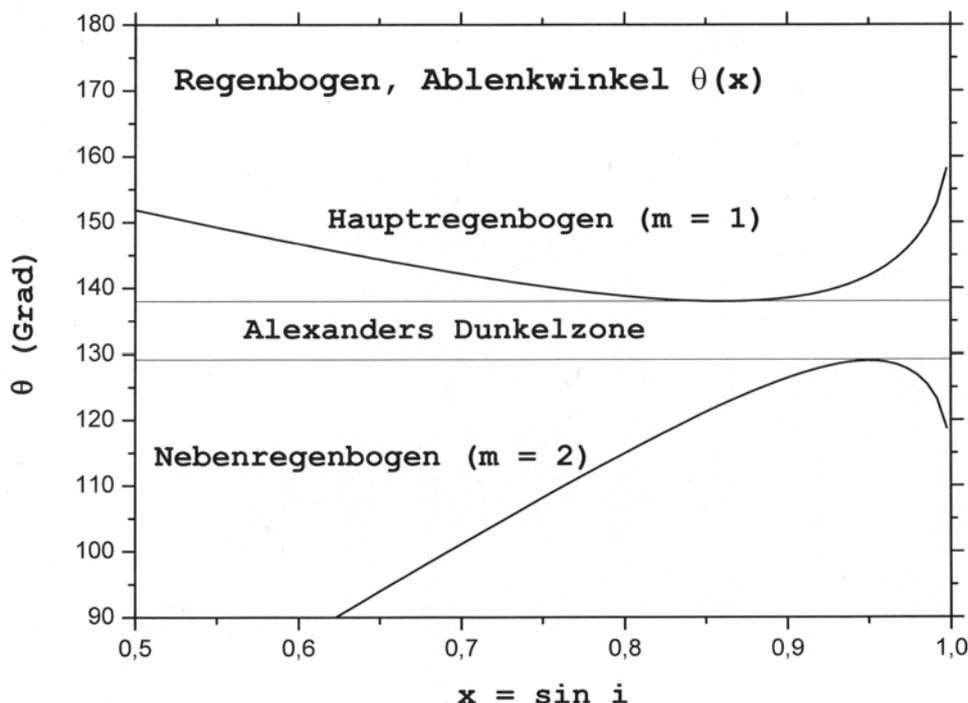


Abbildung 2 Ablenkwinkel θ als Funktion des Einfallsparameters x (Fig. 2 in ¹). Für einmalige Reflexion im Innern des Tropfens ($m = 1$, Hauptregenbogen) ist θ_1 direkt aufgetragen, für zweimalige Reflexion ($m = 2$, Nebenregenbogen), wie üblich, $360^\circ - \theta_2$. Die Regenbogenwinkel sind die Minimal- bzw. Maximalwerte der beiden Kurven: $\theta_{10} = 138^\circ$ ($m = 1$) und $360^\circ - \theta_{20} = 129^\circ$, also $\theta_{20} = 231^\circ$ ($m = 2$). In den Winkelbereich zwischen diesen Werten wird nur wenig Licht abgelenkt (höhere Ordnungen). Deshalb erscheint dieses Gebiet dunkler als die Umgebung des Himmels.

Austritt wiederum ($i - r$). Bei m internen Reflexionen ergibt sich somit der Ablenkwinkel zu

$$(4) \quad \theta_m = \left| 2(i - r) + m(\pi - 2r) \right| \quad \text{modulo } 2\pi,$$

(Gl. (1) in¹). Für den Hauptregenbogen ist $m = 1$, im Fall des Nebenregenbogens $m = 2$, usw. Setzt man für die Winkel i und r die Ausdrücke in Gln. (2) und (3) ein, erhält man

$$(5) \quad \theta_m(x) = \left| m\pi + 2\sin^{-1}(x) - (2 + 2m)\sin^{-1}\left(\frac{x}{n}\right) \right| \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Abbildung 2 zeigt θ_m als Funktion von x für $m = 1$ und $m = 2$. Dabei wurde $n = 4/3$ verwandt. Wie üblich, wurde statt des Winkels θ_2 für den Nebenregenbogen der Wert $360^\circ - \theta_2$ aufgetragen. Aus der Abbildung geht hervor, dass der Ablenkwinkel θ_1 für einmalige Reflexion im Innern des Tropfens (Hauptregenbogen) im Minimum einen Wert von etwa 138° hat. Im Fall zweimaliger interner Reflexion (Nebenregenbogen) hat $360^\circ - \theta_2$ einen Maximalwert von etwa 129° , das heißt, θ_2 einen Minimalwert von 231° . Die beiden Winkel 138° bzw. 231° sind, wie weiter unten gezeigt wird, die Ablenkwinkel für die betreffenden Regenbögen. In den Bereich zwischen diesen Winkeln wird höchstens Licht höherer Ordnung gestreut. Dessen Intensität ist klein, so dass er als dunkles Band zwischen beiden Bögen wahrgenommen wird. Es wird nach *Alexander von Aphrodisias*⁷ benannt (*Alexanders Dunkelzone*).

Die Minimalwerte θ_{10} und θ_{20} der beiden Ablenkwinkel ($m = 1$ bzw. $m = 2$) kennzeichnen die Lage der Brennlinien, die die Sonnenstrahlen nach dem Durchgang durch den Wassertropfen bilden. Ihre Lage ergibt sich aus den Nullstellen (und gleichzeitigem Vorzeichenwechsel) der Ableitung $d\theta/dx$. Für den Fall $m = 1$ ist nach Gl. (5)

$$(6) \quad \theta_1 = \pi + 2\sin^{-1}(x) - 4\sin^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)$$

(Gl. (3) in¹). Die ersten beiden Ableitungen sind daher

$$(7) \quad \frac{d\theta_1}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2-x^2}}$$

und

$$(8) \quad \frac{d^2\theta_1}{dx^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{4x}{(n^2-x^2)^{3/2}}.$$

(Gln. (4) und (5) in¹). Aus $d\theta/dx = 0$ folgt für $m = 1$

$$(9) \quad x_{01} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Die Ungleichungen $d\theta/dx > 0$ und $d\theta/dx < 0$ haben als Lösungen $x > x_0$ bzw. $x < x_0$. Daher wechselt die Ableitung an der Stelle x_{01} ihr Vorzeichen von Minus nach Plus, und es liegt in der Tat ein Minimum vor. Für $n = 4/3$ und $m = 1$ (Hauptregenbogen) ist $x_{01} = 0,860663$. Der zugehörige Winkel ist nach Gl. (6)

$$\theta_{10} = 2,40804 \text{ rad} = 137,970^\circ.$$

(rad = *Radian*, Bogenmaß eines Winkels). Für $m = 2$ (Nebenregenbogen) folgt nach Gl. (5)

$$(10) \quad \theta_2 = 2\pi + 2\sin^{-1}(x) - 6\sin^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)$$

und (kleine Rechenübung)

$$(11) \quad x_{02} = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$$

mit dem Zahlenwert $x_{02} = 0,950146$. Der zugehörige Ablenkwinkel ist

$$\theta_{20} = 4,03133 \text{ rad} = 230,978^\circ.$$

Abbildung 3 zeigt den Verlauf der beiden Strahlen mit den Einfallsparemern x_{01} und x_{02} durch den Wassertropfen. Sie werden exakt unter den Winkeln θ_{10} bzw. θ_{20} und damit *minimal* abgelenkt. Sie hießen auch *kritische Strahlen*. Steht die Sonne tief am Horizont, kulminieren die zugehörigen Bögen unter den Höhenwinkeln $\alpha_{10} = 180^\circ - 137,970^\circ \cong 42^\circ$ (Hauptregenbogen) bzw. $\alpha_{20} = 230,978^\circ - 180^\circ \cong 51^\circ$ (Nebenregenbogen).

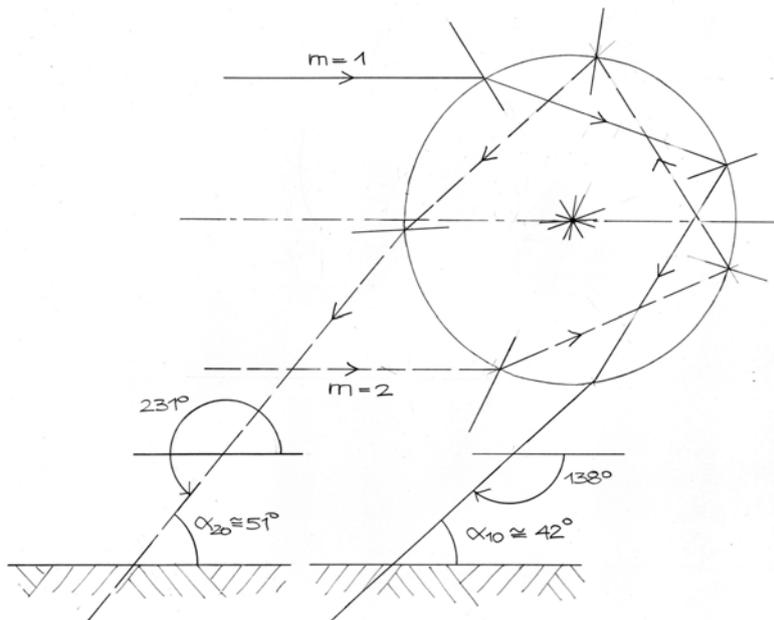


Abbildung 3 Lichtstrahlen, die minimal abgelenkt werden ("kritische" Strahlen). Ihre Ablenkwinkel sind 138° (Hauptregenbogen) und 231° (Nebenregenbogen). Steht die Sonne am Horizont, Verlaufen ihre Strahlen parallel zur Erdoberfläche, so dass die beiden Bögen ihren höchsten Punkt unter dem Höhenwinkel 42° bzw. 51° erreichen.

Die erhöhte Intensität in der Nähe der minimalen Ablenkwinkel folgt aus dem Term für den klassischen Streuquerschnitt. Gemeint ist der *differentielle Wirkungsquerschnitt* für die Streuung eines klassischen Teilchens an einem (ruhenden) Streuzentrum. Für diesen gilt (Anhang A)

$$(12) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{db}} \right|$$

(Gl. (2) in¹). Da die Minimalwerte θ_{10} und θ_{20} an den Nullstellen der Ableitung

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{db} = \frac{1}{a} \frac{d\theta}{dx}$$

angenommen werden, wird der klassische Streuquerschnitt an diesen Stellen (theoretisch) unendlich groß. Die wellenoptische Rechnung (weiter unten) vermeidet diese Singularität.

Gleichung (12) gilt für den Fall, dass nur *ein* Einfallsparemter b zur Streuung unter dem Winkel θ beiträgt. Führen mehrere Einfallsparemter zum gleichen Streuwinkel, ist über diese zu summieren. In der Umgebung des Regenbogenwinkels θ_0 gibt es, wie gleich gezeigt wird, zwei derartige Einfallsparemter. Die rechte Seite von Gl. (12) besteht also in unserem Fall aus zwei Summanden.

Um das Verhalten des Streuquerschnitts in der Umgebung von θ_0 bzw. x_0 zu untersuchen und die beiden genannten Einfallparameter zu bestimmen, entwickeln wir θ nach Taylor (Diese und die nachfolgenden Rechnungen beziehen sich ausschließlich auf den Hauptregenbogen, der Index „1“ bei θ wird deshalb im Folgenden weggelassen.). Da die erste Ableitung $d\theta/dx$ an der Stelle $x = x_0$ verschwindet, gilt näherungsweise

$$(13) \quad \theta \cong \theta_0 + \frac{1}{2}\theta''(x - x_0)^2$$

mit (kleine Rechenübung)

$$(14) \quad \theta'' = \left. \frac{d^2\theta}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{9}{2} \frac{\sqrt{4-n^2}}{(n^2-1)^{3/2}}$$

(Gl. (6) in ¹). Gleichung (13) ergibt, nach x aufgelöst,

$$x = x_0 \pm \sqrt{2(\theta - \theta_0)/\theta''}.$$

Das sind die beiden zur Streuung unter einem Winkel θ beitragenden Einfallparameter. Der numerische Wert von θ'' für $n = 4/3$ ist

$$\theta'' = 9,77964.$$

Mit $x_{01} = 0,860663$ folgt dann (für den Hauptregenbogen)

$$x_{(1,2)} \cong 0,860663 \pm 0,452224\sqrt{\theta - \theta_0}.$$

Beispiel: Der Regenbogenwinkel ist $\theta_0 = 2,40804$ rad. Zum 0,08% größeren Winkel $\theta = 2,41000$ gehören die Lösungen $x_{(1)} = 0,880684$ und $x_{(2)} = 0,840642$.

Nun zum Wirkungsquerschnitt: Wegen $|x - x_0| = \sqrt{2(\theta - \theta_0)/\theta''}$ und

$$\frac{d\theta}{db} = \frac{1}{a} \frac{d\theta}{dx} \cong \frac{\theta''}{a}(x - x_0)$$

ist der Betrag der Ableitung $d\theta/db$ für beide Lösungen gleich. Außerdem können wir in Gl. (12) für beide Lösungen näherungsweise

$$b \cong x_0 a \quad \text{und} \quad \sin \theta \cong \sin \theta_0$$

setzen. Damit sind die Terme im Wirkungsquerschnitt, die den beiden Lösungen entsprechen, gleich und können durch den Faktor 2 berücksichtigt werden. Wir erhalten also

$$(15) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \frac{x_0 a}{\sin \theta_0} \frac{1}{|\theta''(x - x_0)/a|}.$$

Nach Gl. (13) lässt sich $x - x_0$ durch die Winkeldifferenz $\theta - \theta_0$ ausdrücken. Das führt zu

$$(16) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = a^2 \frac{x_0}{\sin \theta_0} \sqrt{\frac{2}{\theta''(\theta - \theta_0)}}, \quad \theta > \theta_0$$

(Gl. (7) in ¹). Das Ergebnis der klassischen Strahlenoptik ist somit: Am Regenbogenwinkel θ_0 ist die Streuung (theoretisch) unendlich groß, es gibt aber auch für $\theta > \theta_0$ Licht, das vom Wassertropfen zurück gestreut wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür fällt mit ansteigendem Winkel sehr schnell ab. Das erklärt die hohe Leuchtstärke der beiden Regenbögen und die Tatsache, dass der Himmel auch noch innerhalb des Hauptbogens und außerhalb des Nebenbogens aufgehell ist.

2. Farben des Regenbogens, Dispersion

Die Farben des Regenbogens folgen aus der Tatsache, dass der Brechungsindex n des Wassers von der Wellenlänge des Lichts abhängt. Abbildung 4 zeigt diese Abhängigkeit.

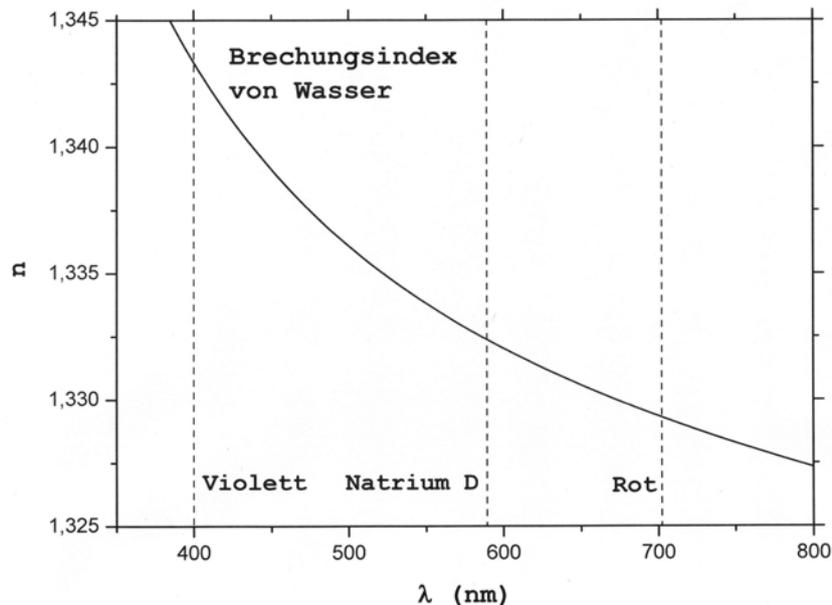


Abbildung 4 Brechungsindex n von Wasser als Funktion der Wellenlänge λ (Fig. 3 in ¹). Der Bereich des sichtbaren Lichts liegt zwischen 400 und 700 nm. In diesem Intervall ändert sich der Brechungsindex um etwa $\Delta n = 0,013$.

Da der Ablenkwinkel θ nach Gl. (6) mit dem Brechungsindex variiert, hängt er auch von der Wellenlänge des Lichts ab. Dadurch sieht man die Brennlinie je nach Wellenlänge (Farbe) unter geringfügig anderen Winkeln. Um die Winkelbreite des Regenbogens (von Rot bis Violett) abzuschätzen, betrachten wir die Rate, mit der sich der Ablenkwinkel θ als Funktion des Brechungsindex n ändert. Aus Gl. (6) folgt

$$(17) \quad \frac{d\theta}{dn} = -4 \frac{d}{dn} \left[\sin^{-1} \left(\frac{x}{n} \right) \right] = \frac{4x}{n \sqrt{n^2 - x^2}}$$

(Gl. (8) in ¹). Am Regenbogenwinkel θ_0 ist

$$(18) \quad \left. \frac{d\theta}{dn} \right|_{x=x_0} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{n^2 - 1}}$$

Gl. (9) in ¹). Für $n = 4/3$ hat diese Größe den Wert $d\theta/dn|_{x_0} = 2,536$ rad. Wir schätzen jetzt die Größe des Intervalls Δn der Brechungsindizes, die im sichtbaren Licht vorkommen (Der mit 2,536 multiplizierte Wert ergibt dann die Winkelbreite $\Delta\theta$ des Regenbogens). Definiert man (etwas willkürlich) den Bereich des sichtbaren Lichts als das Intervall der Wellenlängen zwischen 400 und 700 nm, dann ändert sich der Brechungsindex in diesem Intervall um etwa ⁷ $\Delta n = 0,013$. Daraus folgt als Winkelbreite des Regenbogens $\Delta\theta = 0,013 \cdot 2,536$ rad = 0,033 rad = 1,89°. Die Farben des Regenbogens sind daher über einen Winkelbereich von etwa 2° aufgefächert. Da der Brechungsindex mit der Wellenlänge fällt, wird das rote Licht weniger abgelenkt als des violette. Man sieht daher das Rot des Bogens (Haupt- und Nebenbogen) an der Seite, die jeweils der Dunkelzone zugewandt ist.

3. Wellenoptik des Regenbogens (Young), Supernumerary Arcs

Lichtstrahlen, die mit dem Einfallparameter $x_0 a$ auf den Wassertropfen treffen (*kritische Strahlen*), werden unter dem Regenbogenwinkel θ_0 abgelenkt. Wir betrachten jetzt Strahlen, deren Einfallparameter ein wenig von $x_0 a$ abweicht. Nach Gl. (13) hängt die Abweichung $\theta - \theta_0$ des Ablenkwinkels vom Regenbogenwinkel quadratisch vom Unterschied $x - x_0$ der Einfallparameter ab. Das heißt, es gibt zwei Einfallparameter zu beiden Seiten von x_0 (der eine größer, der andere kleiner als x_0), zu denen Strahlen gehören, die nach Durchgang durch den Tropfen unter *demselben* Winkel θ austreten. Im Wellenbild können entsprechende Wellenzüge, wie *Young*⁸ erkannte, interferieren. Ob sie konstruktiv oder destruktiv interferieren, hängt von ihrer Phasendifferenz ab, mithin von der Differenz ihrer optischen Wege. Diese ändert sich ihrerseits als Funktion von $x - x_0$, so dass Interferenzeffekte in der Tat möglich sind. Es stellt sich heraus, dass sie für die „überzähligen Bögen“, engl. *supernumerary arcs*, verantwortlich sind.

Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen Interferenzeffekte im Regenbogen sichtbar sind. Zunächst legen wir für die einfallende und gestreute Welle Flächen fest, zwischen denen wir den optischen Weg der Wellenzüge in der Nähe des Regenbogenstrahls (des *kritischen Strahls*) mit dem

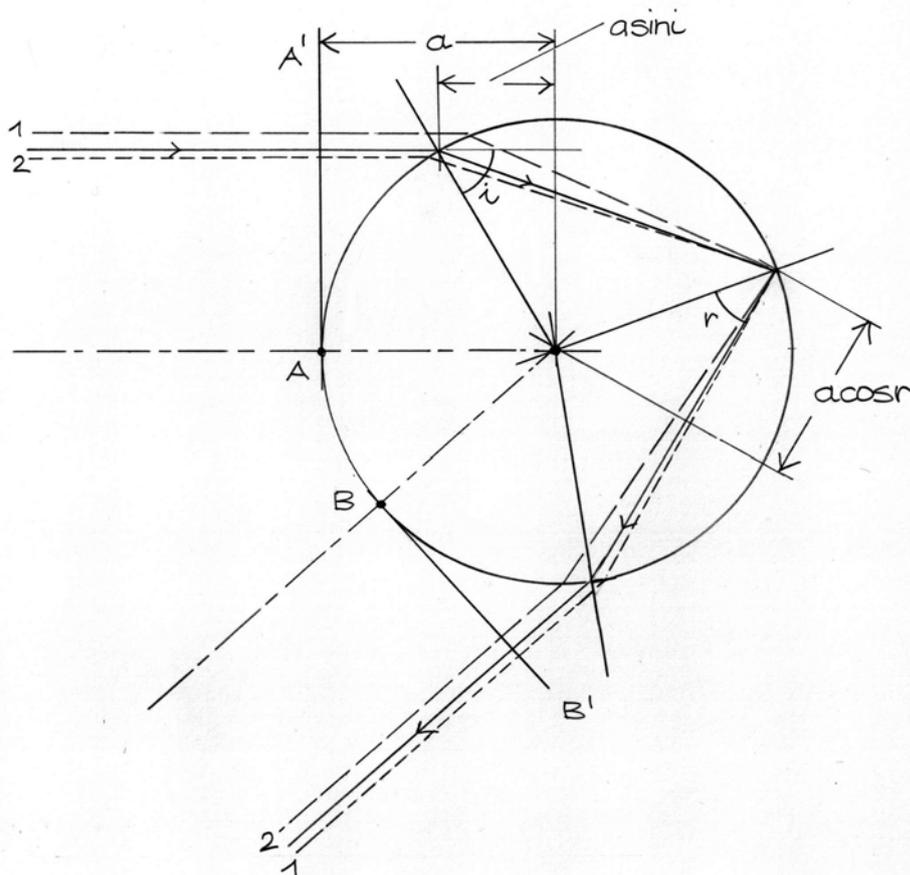


Abbildung 5 Optische Wege im Wassertropfen zur Berechnung der Phase eines Wellenzugs in der Ebene BB' , siehe Gl. (19) des Textes. Die drei eingezeichneten Strahlen dienen dazu, Interferenzeffekte bei der Regenbogenstreuung zu erklären: Die ausgezogene Linie ist der *kritische Strahl* (Regenbogenstrahl). Mit 1 und 2 (gestrichelt) sind Strahlen angedeutet, die beim Austritt aus dem Tropfen parallel verlaufen und deren Richtung nur *minimal* von der Richtung des kritischen Strahls abweicht (wie in Fig. 1 in ¹). Ihre relative Phase ist abhängig davon, wie groß diese Winkelabweichung ist (Gl. (26) des Textes). Die den Strahlen entsprechenden Wellenzüge interferieren und erzeugen neben dem Hauptmaximum (dem Regenbogen) die „überzähligen“ Bögen (engl. *supernumerary arcs*).

Ablenkwinkel θ_0 berechnen. Geeignet sind die in Abbildung 5 mit AA' und BB' bezeichneten Flächen, die senkrecht zum einfallenden Strahl bzw. senkrecht zum Regenbogenstrahl orientiert sind. Der optische Weg ist die Summe der Produkte von Weglänge und Brechungsindex auf den Teilstücken des Weges, den der Wellenzug zurücklegt. Multipliziert man den optischen Weg mit der (Vakuum-) Wellenzahl $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, erhält man die Phase ϕ der Welle am Ort BB' relativ zur Anfangsphase in AA' . Aus der Geometrie (Abbildung 5) folgt

$$(19) \quad \phi = 2ka(1 - \cos i + 2n \cos r)$$

(Gl. (10) in¹). Dabei ist $2(1 - \cos i)$ die Summe der Wege von AA' bis zur Oberfläche des Tropfens und, nach Verlassen des Tropfes, bis zur Referenzfläche BB' . Der Term $4n \cos r$ ist der optische Weg im Innern des Tropfens. Nach Gl. (1) und (2) ist $\sin i = x$ und $\sin r = (\sin i)/n = x/n$, also folgt

$$\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} = \sqrt{1 - x^2}$$

und

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - (x/n)^2}.$$

Setzt man dies in Gl. (19) ein, erhält man

$$(20) \quad \phi(x) = 2ka \left(1 - \sqrt{1 - x^2} + 2\sqrt{n^2 - x^2} \right)$$

(Gl. (11) in¹). Die Phase hängt daher vom Einfallparameter bzw. von x ab. Uns interessiert das Verhalten von $\phi(x)$ für kleine Abweichungen vom kritischen Strahl, das heißt, für kleine Werte von $x - x_0$. Dazu vergleichen wir die Ableitung $d\phi/dx$ mit dem Term für $d\theta/dx$ in Gl. (7). Es ist

$$(21) \quad \frac{d\phi}{dx} = 2ka \left[\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{n^2 - x^2}} \right]$$

(Gl. (12) in¹). Der Vergleich mit Gl. (7) ergibt

$$(22) \quad \frac{d\phi}{dx} = kax \frac{d\theta}{dx}$$

(Gl. (13) in¹). Wir setzen als Abkürzung

$$\xi = x - x_0$$

und können damit Gl. (22) schreiben

$$(23) \quad \frac{d\phi}{d\xi} = ka(x_0 + \xi) \frac{d\theta}{d\xi}$$

(Gl. (14) in¹). Diese Gleichung integrieren wir auf beiden Seiten von 0 bis ξ (bzw. 0 bis θ auf der rechten Seite). Das ergibt

$$(24) \quad \begin{aligned} \phi(\xi) - \phi_0 &= ka \left[x_0(\theta - \theta_0) + \int_0^\xi \xi' \frac{d\theta}{d\xi'} d\xi' \right] \\ &= ka \left[x_0(\theta - \theta_0) + \xi\theta - \int_0^\xi \theta(\xi') d\xi' \right] \end{aligned}$$

(Gln. (15) und (16) in¹). Nach Gl. (13) ist

$$\theta(\xi) \cong \theta_0 + \theta'' \xi^2 / 2.$$

Setzt man dies in das Integral ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \phi_0 + ka \left[x_0(\theta - \theta_0) + \xi \theta_0 + \xi^3 \frac{\theta''}{2} - \int_0^\xi \left(\theta_0 + \theta'' \frac{\xi'^2}{2} \right) d\xi' \right] \\
(25) \quad &= \phi_0 + ka \left[x_0(\theta - \theta_0) + \xi \theta_0 + \xi^3 \frac{\theta''}{2} - \xi \theta_0 - \theta'' \frac{\xi^3}{6} \right] \\
&= \phi_0 + ka \left[x_0(\theta - \theta_0) + \xi^3 \frac{\theta''}{3} \right]
\end{aligned}$$

(Gl. (17) in¹). Zwei Wellenzüge mit kleinem, dem Betrag nach gleichem aber entgegengesetztem ξ , haben damit eine Phasendifferenz

$$(26) \quad \delta = \phi(\xi) - \phi(-\xi) = 2ka\theta'' \frac{\xi^3}{3}$$

(Gl. (18) in¹). Konstruktive Interferenz ergibt sich, wenn δ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, also $\delta = 2\pi N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$). Eine genauere Rechnung zeigt, wie *Jackson*⁹ anmerkt, dass N durch $N + 1/4$ zu ersetzen ist und die Zählung bei $N = 0$ beginnt.

Setzt man die Phasendifferenz gleich $2\pi N$, folgt mit $\xi = \sqrt{2(\theta - \theta_0)/\theta''}$

$$2ka\theta'' \left[\frac{2(\theta - \theta_0)}{\theta''} \right]^{3/2} = 2\pi N$$

oder für die Winkel θ_N der Intensitätsmaxima

$$(27) \quad \theta_N - \theta_0 = \frac{(\theta'')^{1/3}}{2} \left(\frac{3\pi N}{ka} \right)^{2/3}$$

(Gl. (19) in¹). Diese Winkel entsprechen den Positionen weiterer Regenbögen. Das sind die schon erwähnten „überzählige Bögen“ oder *supernumerary arcs*. Sie treten bei Ablenkwinkeln auf, die größer als θ_0 sind, fallen also in das aufgehellte Gebiet innerhalb des Hauptregenbogens (und außerhalb des Nebenregenbogens).

Die überzähligen Bögen (kurz auch *supernumeraries*) sind nicht immer zu sehen. Aus Gl. (27) geht hervor, dass der Winkel $\theta_N - \theta_0$ von der Größe des Wassertropfens abhängt, und zwar wie $(ka)^{-2/3}$. Für große Tropfen wird der Winkel sehr klein und die *supernumeraries* werden von den Farben des Hauptregenbogens überstrahlt. Wie groß die Tropfen maximal sein dürfen, lässt sich abschätzen: Für das erste Nebenmaximum ist $N = 5/4$ (eigentlich $N = 1$, aber $N + 1/4 = 5/4$). Außerdem war $\theta'' = 9,77964$. Nimmt man als Mindestgröße für die Winkeldifferenz zum Hauptregenbogenstrahl die „Dispersionsbreite“ 2° des Regenbogens, also $(\theta - \theta_0)_{\min} \cong 0,03$ rad, erhält man

$$ka = \frac{3\pi N}{\left[\frac{2(\theta - \theta_0)}{(\theta'')^{1/3}} \right]^{3/2}} = \frac{3\pi \cdot (5/4)}{\left[\frac{2 \cdot 0,03}{9,78^{1/3}} \right]^{3/2}} \cong 2,5 \cdot 10^3.$$

Für die *Natrium D*-Linien ist $k \cong 1,07 \cdot 10^7 \text{ nm}^{-1}$, so dass als maximaler Tropfenradius folgt $a_{\max} \cong 0,28 \text{ mm}$. Größere Tropfen führen dazu, dass die *supernumeraries* durch die Farben des Hauptregenbogens verdeckt werden.

Aber selbst kleine Tropfen garantieren nicht, dass sie beobachtet werden. Sind die Tropfen unterschiedlich groß, verwischen die Interferenzmaxima – auch das ist aus Gl. (27) ersichtlich. Um die *supernumeraries* deutlich zu sehen, müssen die Tropfen klein und von einheitlicher Größe sein. Das war offenbar schon *Young*¹⁰ bekannt.

Im Grenzfall sehr kleiner Tropfen ($a < 50 \mu\text{m}$) sind die Intensitätsverteilungen des Hauptregenbogens ($N = 1/4$) und der supernumeraries für eine gegebene Wellenlänge über so große Winkelbereiche verteilt, dass Dispersionseffekte nicht beobachtet werden. Alle Farben haben breite Intensitätsmaxima, die unter annähernd gleichem Winkel auftreten. Das Resultat ist ein „weißer“ Regenbogen oder „Nebelbogen“.

4. Huygens' Prinzip für den Regenbogen, Airy Integral

George B. Airy¹¹ (1836) war der erste, der den Wirkungsquerschnitt für die Regenbogenstreuung in wellenoptischer Näherung berechnete. Er benutzte dazu die inzwischen etablierte Beugungstheorie von Huygens, Young, Fresnel und Kirchhoff¹². Airy's Arbeit ist der Ausgangspunkt vieler wellenoptischer Rechnungen zur Streuung von Licht an Wassertropfen. Eine umfassende Darstellung der Arbeiten auf diesem Gebiet verdanken wir van de Hulst¹³.

Nach Kirchhoff ist die skalare Amplitude $\psi_{\text{scatt}}(P)$ einer gestreuten Welle an einem Punkt P („Aufpunkt“) weit entfernt von einem ebenen Flächenstrahler gegeben durch

$$(28) \quad \psi_{\text{scatt}}(P) = \frac{k}{2\pi i} \int_A \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') da'$$

(Gl. (26) in¹). Eine Herleitung dieser Formel befindet sich im Anhang B. Das Integral ist über alle Flächenelemente da' der strahlenden Fläche A zu bilden. Dabei setzen wir voraus, dass die lineare Ausdehnung der Fläche (Länge, Breite) klein ist gegenüber der Entfernung R zum Aufpunkt P , und dass wir nahezu senkrecht (parallel zur Flächennormalen) auf diese kleine Fläche schauen. Das heißt, wir beobachten in Fraunhofer'scher Näherung und in der Umgebung der „optischen Achse“. Die Bedingung dafür siehe Anhang C. Gleichung (28) ist, wie man unschwer erkennt, eine Formulierung des Huygens'schen Prinzips: Der Term $\exp(ikR)/R$ ist die Phase der Kugelwelle, die von jedem Element der strahlenden Fläche ausgeht, und die Wellenamplitude $\psi(\vec{x}')$ gibt an, mit welcher Amplitude und Phase dieses strahlt.

Wir betrachten als strahlende Fläche die Umgebung des Regenbogenstrahls entlang der Geraden BB' . Unser Koordinatensystem sei so gewählt, dass die z -Achse von B aus in Richtung des gestreuten Regenbogenstrahls ($\theta = \theta_0$) zeigt. Von den dazu senkrechten Achsen ist nur die relevant,

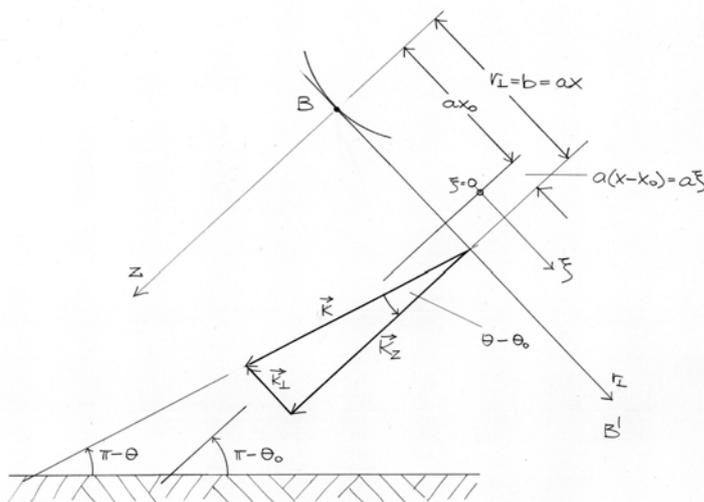


Abbildung 6 Koordinaten entlang BB' (siehe Text) und Zerlegung des Wellenvektors k in Komponenten parallel und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des austretenden Wellenzuges

die von B aus nach B' zeigt. Denn nur in dieser Richtung ändert sich die Phase der gestreuten Welle. Bezeichnen wir die Richtung von B nach B' mit \vec{r}_\perp und messen vom Punkt B aus, ist der Wert von \vec{r}_\perp an der Stelle des Regenbogenstrahls ax_0 .

Die Phase der Welle entlang BB' hat die Form

$$(29) \quad \psi \propto \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\phi(\xi)] \quad ,$$

wobei $\phi(\xi)$ durch Gl. (25) gegeben ist und der Wellenzahlvektor \vec{k} in Richtung θ der gestreuten Welle zeigt. Wir zerlegen ihn in seine Komponenten k_z und \vec{k}_\perp in Richtung z und in Richtung BB' . Das ergibt

$$(30) \quad \psi \propto \exp[i(k_z z + \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp) + i\phi(\xi)] \quad .$$

Aus Abbildung 6 geht hervor

$$(31) \quad \begin{aligned} \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp &= k_\perp r_\perp \cos(\angle k_\perp, r_\perp) = -k_\perp r_\perp \\ k_\perp &\cong k(\theta - \theta_0) \quad , \\ r_\perp &= b = ax \end{aligned}$$

wobei das Minuszeichen vor $k_\perp r_\perp$ zum Ausdruck bringt, dass \vec{r}_\perp und \vec{k}_\perp antiparallel sind. Damit ist

$$(32) \quad \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp = -ka(\theta - \theta_0)x \quad .$$

Wegen $z = 0$ liefert $\exp[ik_z z]$ einen konstanten Beitrag zur Phase, der hier nicht interessiert. Er kann als Faktor vor das Integral gezogen werden. Der relevante Teil der Phase von ψ ist somit gegeben durch

$$(33) \quad \begin{aligned} \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + \phi(\xi) &= -ka(\theta - \theta_0)x + \phi_0 + ka \left[x_0(\theta - \theta_0) + \xi^3 \frac{\theta''}{3} \right] \\ &= ka \left[(\theta - \theta_0)(x_0 - x) + \xi^3 \frac{\theta''}{3} \right] + \phi_0 \quad . \\ &= ka \left[-\xi(\theta - \theta_0) + \xi^3 \frac{\theta''}{3} \right] + \phi_0 \end{aligned}$$

Nach Gl. (13) ist $\theta - \theta_0 \cong \theta'' \xi^2 / 2$, so dass folgt

$$(34) \quad \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp + \phi(\xi) \cong -\frac{ka}{6} \theta'' \xi^3 \quad .$$

Damit ist die Wellenfunktion entlang der Linie BB' in der Umgebung des Regenbogenstrahls ($x = x_0$ bzw. $\xi = 0$) bis auf konstante Faktoren gegeben durch

$$(35) \quad \psi(\xi) = \exp\left[-i\frac{ka}{6}\theta''\xi^3\right] \quad .$$

Vorausgesetzt wurde dabei, dass sich die Amplitudenfunktion (das heißt, der Faktor, der zum Exponentialterm hinzu kommt) in der Umgebung von x_0 nur langsam ändert.

Die rechte Seite von Gl. (35) setzen wir in das Kirchhoff'sche Integral Gl. (28) ein. Dem Flächenelement da' im Integral geben wir die Breite $d\xi$ (in Richtung BB'). Seine Ausdehnung senkrecht dazu (seine Höhe) interessiert hier nicht, da das Integral über diese Raumrichtung zu einem konstanten Faktor führt. Integriert wird nur über ξ , also über die Koordinate in Richtung BB' . Gleichung (28) wird damit zu

$$(36) \quad \psi_{scatt} \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ikR]}{R} \exp[-i\frac{ka}{6}\theta'' \xi^3] d\xi$$

Mit dem Proportionalzeichen deuten wir an, dass konstante Faktoren, wie schon erwähnt, nicht von Interesse sind.

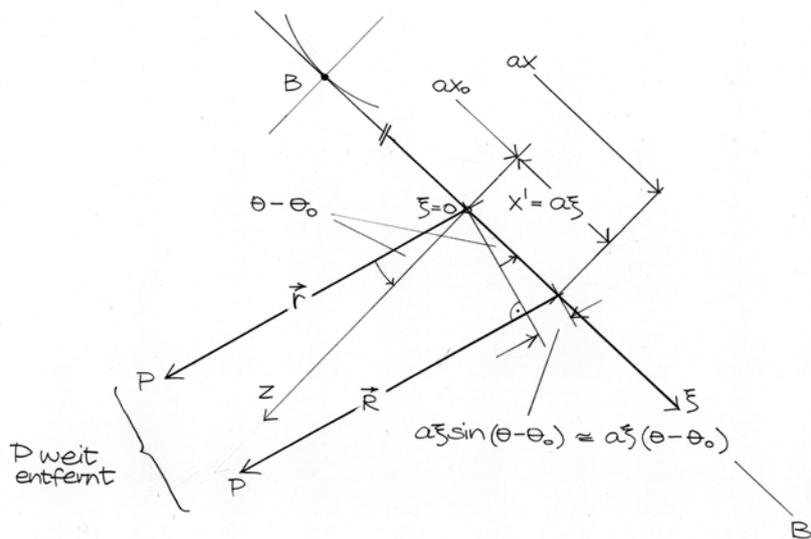


Abbildung 7 Gangunterschied zwischen den Wellenzügen, die sich von $a\xi$ und $\xi = 0$ zum Aufpunkt P bewegen. Da im *Fraunhofer*'schen Beugungsbereich beobachtet wird, sind die zugehörigen Wellenvektoren näherungsweise parallel.

Wir machen jetzt Gebrauch davon, dass im Bereich der *Fraunhofer*'schen Beugung beobachtet wird. Dazu greifen wir nochmals zurück auf Gl. (28). Beachte: In dieser Gleichung ist x' eine Ortskoordinate, nicht zu verwechseln mit dem anfangs definierten Quotienten $x = b/a$. Jedoch sind x' und $x = b/a$ miteinander verknüpft. Denn für den Ortsvektor \vec{x}' im *Kirchhoff*'schen Integral gilt, wie Abbildung 7 zeigt,

$$(37) \quad |\vec{x}'| = x' = xa - x_0a = \xi a.$$

Dabei wurde von der schon benutzten Abkürzung

$$\xi = x - x_0$$

Gebrauch gemacht. Somit entspricht $x' = \xi a$ dem Punkt $r_{\perp} = ax$ auf der Geraden BB' .

Der Vektor von Punkt $x' = 0$ zum Aufpunkt P werde, wie üblich, \vec{r} genannt. Die Größe R im Integral ist die Entfernung des Flächenelements bei $x' = \xi a$ vom Punkt P . Der entsprechende Vektor zeige auch von hier aus in Richtung P . Dann gilt (Abbildung 7)

$$(38) \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{x}'.$$

Diese Gleichung wird auf beiden Seiten mit \vec{k} skalar multipliziert. Da wir in großer Entfernung (*Fraunhofer*-Bereich) beobachten, sind \vec{r} und \vec{R} annähernd parallel und zeigen in Richtung von \vec{k} . Daher sind die Skalarprodukte $\vec{k} \cdot \vec{r}$ und $\vec{k} \cdot \vec{R}$ in guter Näherung gleich den arithmetischen Produkten und es gilt

$$kR \cong kr - \vec{k} \cdot \vec{x}'.$$

Weiterhin ist

$$\vec{k} \cdot \vec{x}' = ka\xi \cos[\pi/2 - (\theta - \theta_0)] = ka\xi \sin(\theta - \theta_0) \cong ka\xi(\theta - \theta_0),$$

also

$$kR \cong kr - ka\xi(\theta - \theta_0).$$

Diese Beziehung lässt sich auch unmittelbar aus Abbildung 7 ablesen (Als Gangunterschied der Wellenzüge, die von den Punkten $x' = 0$ und $x' = \xi a$ ausgehen):

$$R \cong r - \xi a \sin(\theta - \theta_0) \cong r - \xi a(\theta - \theta_0).$$

Die vorliegende Näherung wird jetzt im Integral Gl. (36) berücksichtigt. Im Nenner machen wir zusätzlich Gebrauch davon, dass $r \gg \xi a (\theta - \theta_0)$ und setzen $R = r$. Damit ist der Nenner unabhängig von ξ und liefert einen konstanten Faktor, der hier nicht relevant ist. Im Zähler führt die Näherung zu

$$\exp[ikR] \cong \exp[ikr - ika\xi(\theta - \theta_0)].$$

Auch hier ist $\exp(ikr)$ ein konstanter Faktor, der nicht interessiert. Somit folgt für die Streuamplitude

$$(39) \quad \psi_{scatt} \propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ika(\theta - \theta_0)\xi] \cdot \exp[-i\frac{ka}{6}\theta''\xi^3] d\xi.$$

(Gl. (27) in¹). Der Realteil dieses Integrals,

$$\psi_{scatt} \propto \int_{-\infty}^{\infty} \cos[ka(\theta - \theta_0)\xi - \frac{ka}{6}\theta''\xi^3] d\xi,$$

ist die physikalisch messbare Größe. Da der Kosinus eine gerade Funktion ist, kann auch zwei Mal von 0 bis ∞ integriert werden. Lassen wir konstante Faktoren (hier den Faktor 2) wie bisher außer Acht, erhalten wir

$$\psi_{scatt} \propto \int_0^{\infty} \cos[ka(\theta - \theta_0)\xi - \frac{ka}{6}\theta''\xi^3] d\xi.$$

Dieses Integral wird üblicherweise in das *Airy-Integral* $Ai(x)$ umgeformt¹⁴. Dazu setze

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{2}{ka\theta''}} t.$$

Das führt zu

$$\psi_{scatt} \propto \int_0^{\infty} \cos\left[\frac{ka(\theta - \theta_0)}{\sqrt[3]{ka\theta''/2}} t - \frac{t^3}{3}\right] \frac{dt}{\sqrt[3]{ka\theta''/2}}.$$

Mit der Abkürzung

$$(40) \quad \eta = \frac{ka(\theta - \theta_0)}{\sqrt[3]{ka\theta''/2}} = \sqrt[3]{\frac{2k^2 a^2}{\theta''}} \cdot (\theta - \theta_0)$$

folgt

$$(41) \quad \psi_{scatt} \propto \int_0^{\infty} \cos\left[\eta t - \frac{t^3}{3}\right] dt \propto \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left[\frac{t^3}{3} - \eta t\right] dt = Ai(-\eta)$$

(Gl. (28) in¹). Den Verlauf von $Ai(-\eta)$ zeigt Abbildung 8. Für positive η oszilliert $Ai(-\eta)$ mit

einer Amplitude proportional zu $\eta^{-1/4}$. Für negative η geht $Ai(-\eta)$ ähnlich wie die Exponentialfunktion sehr schnell gegen Null.

Die Maxima und Minima von $Ai(-\eta)$ sind die Stellen, an denen die überzähligen Bögen (supernumeraries) auftreten. Sie sind in Tabelle 1 aufgelistet. Mit Hilfe von Gl. (40) ergeben sich die zugehörigen Winkel zu

$$(42) \quad \theta_E - \theta_0 = \sqrt[3]{\frac{\theta''}{2k^2 a^2}} \cdot \eta_E.$$

Die Young'sche Rechnung liefert für diese Winkel den Term Gl. (27). Ersetzt man dort N durch den korrigierten Wert $N + 1/4$, folgt

$$(43) \quad \theta_N - \theta_0 = \sqrt[3]{\frac{\theta''}{2k^2 a^2}} \cdot \left[\frac{3\pi}{2} \left(N + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Der Vergleich der rechten Seiten beider Gleichungen zeigt: Der in eckigen Klammern stehende Term der letzten Gleichung entspricht für $N = 0, 1, 2, \dots$ den Stellen η_E der Maxima und Minima

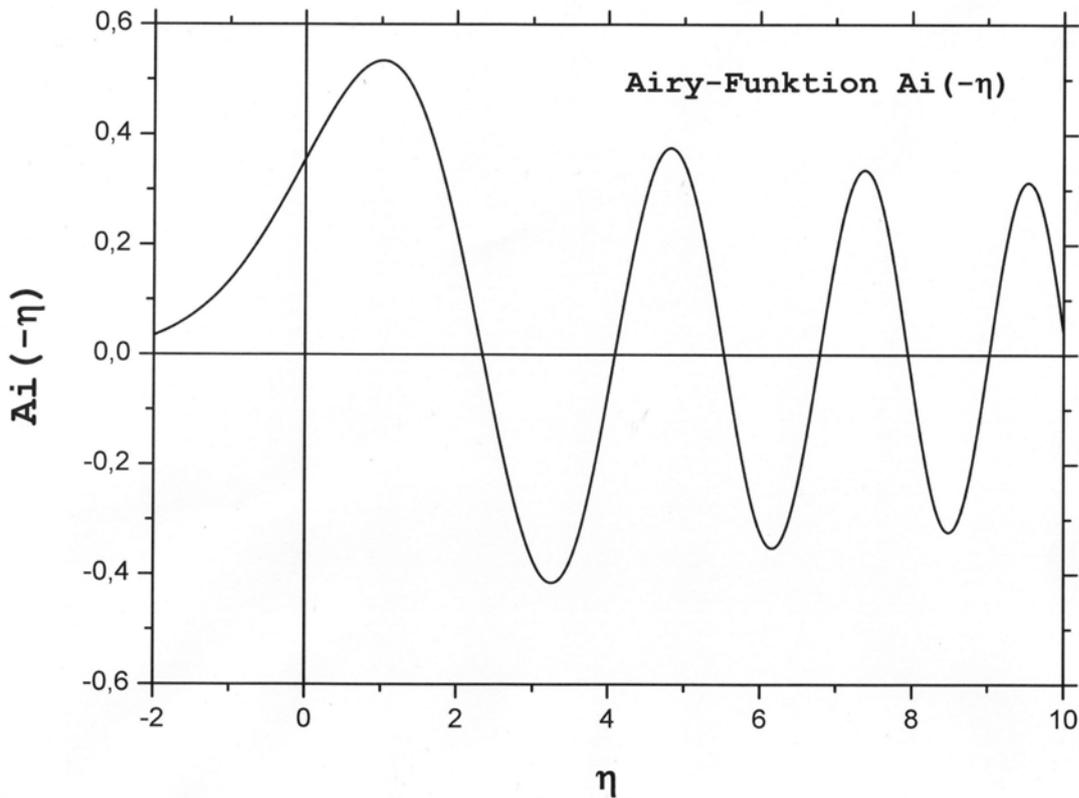


Abbildung 8 Airy-Funktion $Ai(-\eta)$, (Fig. 4d in ¹).

von $Ai(-\eta)$ in Gl. (42). Die Werte des Terms $[(3\pi/2)(N + 1/4)]^{2/3}$ sind ebenfalls in Tabelle 1 aufgeführt. Für große N ist die Übereinstimmung recht gut.

Tabelle 1 Extremstellen η_E der Airy-Funktion $Ai(-\eta)$ und Werte des Terms $[(3\pi/2)(N + 1/4)]^{2/3}$, siehe Text

η_E	1,0188	3,2482	4,8201	6,1633	7,3722
$[(3\pi/2)(N + 1/4)]^{2/3}$	1,1155	3,2616	4,8263	6,1671	7,3748

Es ist interessant, die Winkelpositionen der supernumeraries, die den Werten von η_E in Tabelle 1 entsprechen, mit den Beispielen zu vergleichen, die *Young* in seiner Arbeit⁸ angibt. *Young* schreibt, dass für Tropfen mit einem Durchmesser von 1/76 Zoll (= 0,3342 mm)¹⁵ das Rot des ersten und vierten überzähligen Bogens etwa 2° bzw. 4° vom Rot des Hauptregenbogens entfernt ist (wobei das Rot des ersten Bogens gerade neben dem Violett des Hauptregenbogens liegen würde). Wir benutzen $\lambda = 700 \text{ nm}$ und $n = 1,331$ (Abbildung 4) und erhalten damit nach Gl. (14) $\theta'' = 9,91191$. Die Größe ka ergibt sich zu

$$ka = \frac{2\pi}{700 \text{ nm}} \cdot \frac{0,3342 \text{ mm}}{2} = 1,49989 \cdot 10^3,$$

so dass nach Gl. (42) folgt

$$\theta_E - \theta_0 = 0,013012 \cdot \eta_E \text{ rad (Bogenmaß),}$$

oder, wenn man die Winkel in Grad misst¹⁵,

$$\theta_E - \theta_0 = 0,745519 \cdot \eta_E.$$

Der „Abstand“ der Extremstellen von η zwischen Hauptbogen und erstem überzähligen Bogen ist laut Tabelle $\Delta\eta = 3,2482 - 1,0188 = 2,2294$, so dass für den Winkel zwischen diesen Bögen folgt $\theta_E - \theta_0 = 1,662^\circ$. Für den Winkel zwischen Hauptbogen und viertem überzähligen Bogen ergibt sich entsprechend $\Delta\eta = 7,3722 - 1,0188 = 6,3534$ und $\theta_E - \theta_0 = 4,736^\circ$. Beide Winkel stimmen grob mit den Werten 2° und 4°, die *Young* angibt, überein.

Aus Gl. (42) geht im Übrigen hervor, dass der *Airy*'sche Wert für den Streuwinkel des Hauptbogens

$$\theta_E = \theta_0 + \sqrt[3]{\frac{\theta''}{2k^2a^2}} \cdot 1,0188$$

je nach Tropfengröße mehr oder weniger von kartesischen Wert θ_0 abweicht. Wir schätzen die Abweichung für eine Tropfengröße $a = 0,25 \text{ mm}$ ab: Für $\lambda = 700 \text{ nm}$ (Rot) ist $\theta'' = 9,91191$ und $ka = 1,12 \cdot 10^3$. Damit wird $\theta_E - \theta_0 = 0,015809 \cdot 1,0188 = 0,016106 = 0,9228^\circ$. Für $\lambda = 400 \text{ nm}$ (Violett) ist $\theta'' = 9,25686$ und $ka = 3,93 \cdot 10^3$, was zu $\theta_E - \theta_0 = 0,006692 \cdot 1,0188 = 0,006818 = 0,3906^\circ$ führt.

Tabelle 2 Quadrat der *Airy*-Funktion (2. Zeile) und Intensität relativ zum Hauptregenbogen nach *Airy* (3. Zeile). Zum Vergleich die Werte von $\eta_E^{-1/2}$ (4. Zeile), siehe Text.

η_E	1,0188	3,2482	4,8201	6,1633	7,3722
$Ai^2(-\eta_E)$	0,28693	0,17557	0,14471	0,12810	0,11717
$Ai^2(-\eta_E) / Ai^2(-1,0188)$	1	0,61189	0,50434	0,44645	0,40836
$\eta_E^{-1/2}$	1	0,5600	0,4597	0,4066	0,3717

Tabelle 2 listet die Quadrate der *Airy*-Funktion an den Stellen der Intensitätsmaxima auf (zweite Zeile) und die Werte relativ zum Hauptregenbogen (dritte Zeile). Die vierte Zeile zeigt, dass die Intensität der supernumeraries wie $\eta^{-1/2}$ abfällt. Da $\eta \propto \theta - \theta_0$, entspricht das dem Verhalten des klassischen Wirkungsquerschnitts.

Der Intensitätsverlauf (Quadrat $Ai^2(-\eta)$ der *Airy*-Funktion) für rotes und violette Licht ($\lambda = 700 \text{ nm}$ bzw. $\lambda = 400 \text{ nm}$) ist in Abbildung 9 dargestellt. Als Tropfengröße wurde dabei $a = 64 \mu\text{m}$ ($ka = 1005,3$ für $\lambda = 400 \text{ nm}$) verwandt. Die Maxima links entsprechen dem Hauptregenbogen (rote und violette Komponente), die übrigen Maxima stellen die überzähligen Bögen (*supernumeraries*) dar.

In diesem Fall wäre der erste überzählige Bogen sichtbar, die Bögen höherer Ordnung wären jedoch durch Mischung der Farben verwischt. Unterschiedliche Tropfengrößen würden sie weiter verschleiern.

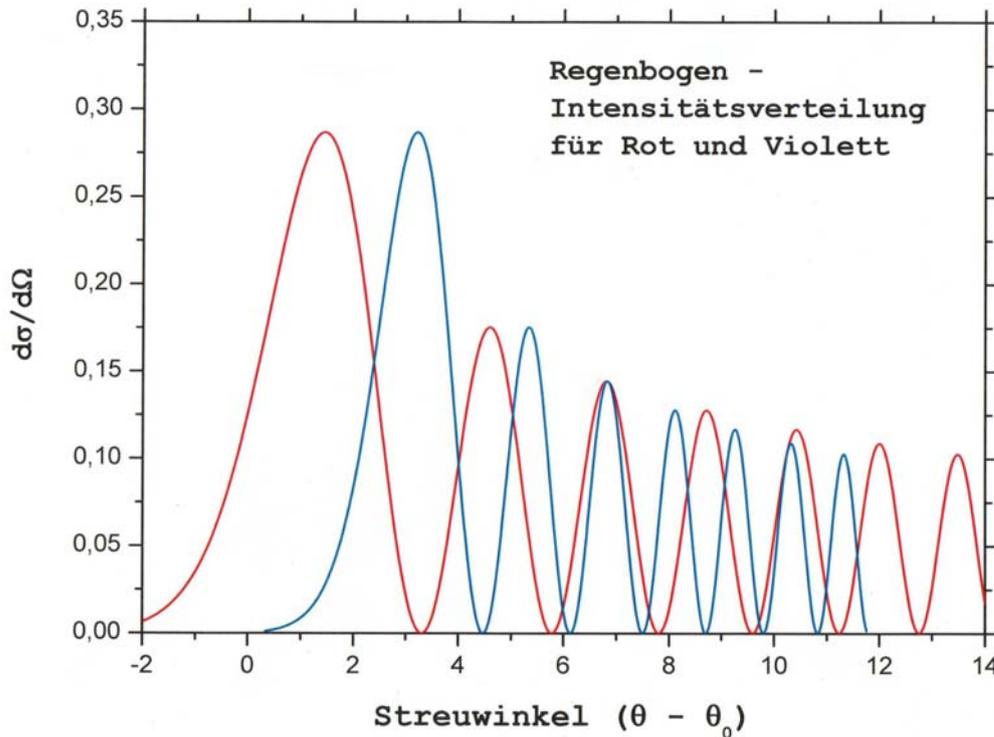


Abbildung 9 Intensitätsverteilung des roten und violetten Regenbogenlichts nach *Airy* (Fig. 4e in ¹). Tropfengröße $a = 64 \mu\text{m}$. Die Maxima links entsprechen dem Hauptregenbogen (rote und violette Komponente), die übrigen Maxima stellen die überzähligen Bögen (*supernumeraries*) dar. Der erste überzählige Bogen ist sichtbar, die Bögen höherer Ordnung sind durch Mischung der Farben unterdrückt oder verwischt.

Der Streuquerschnitt für ein gegebenen Wert ka lässt sich durch das *Airy*-Integral ausdrücken (zumindest näherungsweise), indem man folgenden Trick anwendet: man normiert den Mittelwert der nach *Airy* berechneten Intensität für großes η auf den klassischen Querschnitt (Gl. (16)). Aus dem Handbuch von *Abramowitz* und *Stegun*¹⁴ entnimmt man, dass für großes η der führende Term in einer asymptotischen Reihe für $Ai(-\eta)$ lautet

$$(44) \quad Ai(-\eta) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{\eta}} \sin\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

(Gl. (29) in ¹). Der Mittelwert seines Quadrats ist, da $\langle \sin^2(x) \rangle = 1/2$,

$$\langle |Ai(-\eta)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{\eta}}.$$

Mit

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{2k^2 a^2}{\theta''}} \cdot (\theta - \theta_0)$$

(Gl. (40) oben) folgt

$$\langle |Ai(-\eta)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\theta''}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{1}{ka}\right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta_0}}.$$

Erweitert man mit $\sqrt{2\theta''}$, folgt

$$(45) \quad \langle |Ai(-\eta)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\theta''}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{ka} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{2}{\theta''(\theta - \theta_0)}}$$

(Gl. (30) in ¹). Der klassische Querschnitt (Gl. (16) oben) war

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{klassisch}} = a^2 \frac{x_0}{\sin \theta_0} \sqrt{\frac{2}{\theta''(\theta - \theta_0)}}, \quad \theta \cong \theta_0$$

Daher lässt sich schreiben

$$\sqrt{\frac{2}{\theta''(\theta - \theta_0)}} \cong 2\pi \left(\frac{2}{\theta''} \right)^{2/3} (ka)^{1/3} |Ai(-\eta)|^2,$$

so dass der Wirkungsquerschnitt in der Näherung von *Airy* lautet

$$(46) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Airy}} \cong 2\pi a^2 \frac{x_0}{\sin \theta_0} \left(\frac{2}{\theta''} \right)^{2/3} (ka)^{1/3} |Ai(-\eta)|^2$$

(Gl. (32) in ¹). Für $n = 4/3$ war $\theta_0 = 137,97^\circ$, $\sin \theta_0 = 0,66952$, $x_0 = 0,86066$ und $\theta'' = 9,7796$.
Damit wird

$$(47) \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Airy}} \cong 2,80362 a^2 (ka)^{1/3} |Ai(-\eta)|^2$$

(Gl. (33) in ¹), wobei Verluste durch Reflexion und Brechung nicht berücksichtigt werden. Im Maximum ist $d\sigma/d\Omega = 0,803a^2(ka)^{1/3}$. Für $ka = 10^3$ ist dieser Querschnitt 32mal größer als der

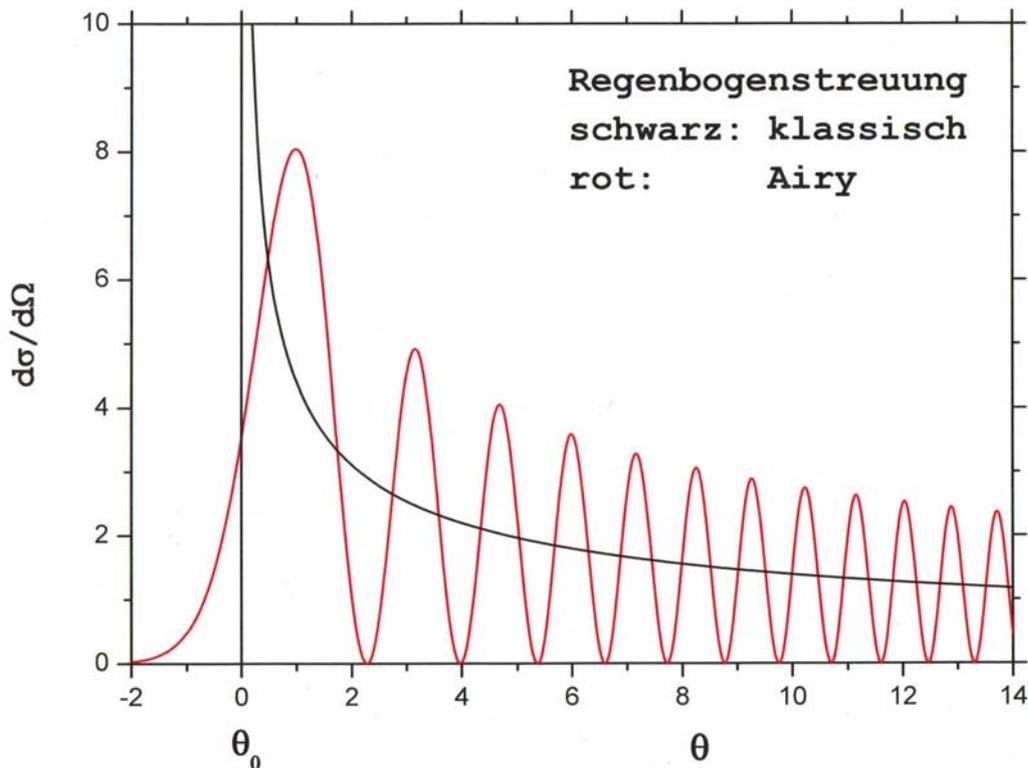


Abbildung 10 Intensitätsverteilung der Regenbogenstrahlung nach *Airy* und klassisch (Fig. 4f in ¹). Die *Airy*'sche Verteilung oszilliert um die klassische Kurve als momentanem Mittelwert.

isotrope Querschnitt $d\sigma/d\Omega = \pi a^2/4\pi = a^2/4$. Abbildung 10 zeigt diesen Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels, zusammen mit dem klassischen Querschnitt für die gleichen Parameter n und ka . Wie erwartet, oszilliert der *Airy*'sche Streuquerschnitt um den klassischen Querschnitt als (gleitendem) Mittelwert.

5. Bemerkungen zu Polarisation und Intensitätsverlust

D. Brewster zeigte 1812, dass das Licht des Regenbogens fast vollständig polarisiert ist. Er bestätigte damit frühere Beobachtungen von *Biot* (in der Physik bekannt durch das *Biot-Savart*'sche Gesetz). Die Polarisation kommt dadurch zustande, dass die Intensität von gebrochenem und reflektiertem Strahl von der Polarisation des einfallenden Lichts abhängt. Das Verhältnis von gestreuter zu einfallender Amplitude ist bei Ablenkung um den Regenbogenwinkel θ_0

$$(48) \quad \frac{E_{scatt}}{E_{inc}} = \frac{8}{27}$$

(Gl. (34) in ¹) für den Fall, dass der elektrische Vektor senkrecht auf der Einfallsebene steht, und

$$(49) \quad \frac{E_{scatt}}{E_{inc}} = 2 \left(\frac{2n}{n^2 + 2} \right)^2 \left(\frac{2 - n^2}{2 + n^2} \right) ,$$

(Gl. (34) in ¹) wenn der elektrische Vektor parallel zur Einfallsebene schwingt. Die Intensität bei senkrechter Polarisation ist daher $(8/27)^2 = 8,78 \cdot 10^{-2}$ der einfallenden Intensität, und (für $n = 4/3$) bei paralleler Polarisation $(5,862 \cdot 10^{-2})^2 = 0,3436 \cdot 10^{-2}$ der einfallenden Intensität. Der Mittelwert ist $(8,78 \cdot 10^{-2} + 0,3436 \cdot 10^{-2})/2 = 4,562 \cdot 10^{-2}$, so dass der Streuquerschnitt für unpolarisiertes Licht nach Gl. (47) noch mit diesem Faktor zu multiplizieren ist.

6. Definition des Airy-Integrals

Das *Airy*-Integral wird in der Arbeit von *van de Hulst*¹³ definiert als

$$(50) \quad f(z) = \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{\pi}{2} (zt - t^3) \right] dt$$

(Gl.(35) in ¹). Die Variable z und unser η sind durch

$$z = \left(\frac{12}{\pi^2} \right)^{1/3} \eta$$

verknüpft. Die Funktion $f(z)$ lautet in unserer Notation

$$f(z) = \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^{1/3} Ai(-\eta) .$$

Beachte, dass auch andere Definitionen des *Airy*-Integrals üblich sind (zu finden z. B. bei *Landau und Lifshitz*¹⁷).

7. Ausblick

Zum Artikel von *Jackson*¹ sollte hinzugefügt werden: Die *Airy*'sche Theorie fußt, wie erwähnt, auf der skalaren Beugungstheorie von *Kirchhoff* und seinen Vorgängern. Sie berücksichtigt nicht, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist, die den *Maxwell*'schen Gleichungen genügt – mit der Bedingung, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang vom Innern des Tropfens nach draußen (und umgekehrt) stetig ist. Die ersten Rechnungen auf der Grundlage der *Maxwell*'schen Gleichungen („exakte“ Theorie), stammen von *Gustav Mie* und *Peter J.W. Debye*¹⁸ und wurden 1908 veröffentlicht. Darauf wird hier nicht eingegangen. Aktuellere exakte Rechnungen führten z. B. *Khare* und *Nussenzveig*¹⁹ aus.

Anmerkungen und Literatur

¹ *J. D. Jackson: From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy*, Physics Reports **320** (1999), 27 – 36, im Internet zu finden unter der Adresse

http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1458104.files/PhysicsOfRainbows_Jackson_PhysRep99.pdf

² *Dietrich von Freiberg* (* vermutlich um 1240/1245, † nach 1310), *De iride et de radialibus impressionibus* („Über den Regenbogen und die Strahleneinwirkungen“). Dietrich gelangt zu seiner Theorie aufgrund eigener *Experimente* – er ist vielleicht einer der ersten Experimentalphysiker nach heutiger Auffassung. Er nimmt, zumindest qualitativ, die kartesische Erklärung vorweg.

³ *René Descartes* (1596 – 1650), in *Discours de la Methode* (1637), Strahlengang nach *Snellius*'schem Brechungsgesetz und Reflexionsgesetz.

⁴ *Isaak Newton* (1643-1727): *Opticks* (1704) *Newton* erkennt, dass der Brechungsindex des Lichts von der Wellenlänge abhängt (Experimente am Prisma)

⁵ *Willebrord van Roijen Snell* (1591-1626), lat. *Snellius*. Formuliert 1618 das Brechungsgesetz.

⁶ $\sin^{-1}(x)$ ist die Umkehrfunktion zu $\sin(x)$. Die Bezeichnung $\sin^{-1}(x)$ setzt sich offenbar gegenüber $\arcsin(x)$ durch.

⁷ aus einschlägigen Tabellen entnimmt man für 20° C die Werte $n(405 \text{ nm}) = 1,3427$ und $n(707 \text{ nm}) = 1,3300$. Also $\Delta n \cong 0,0127$.

⁸ *Thomas Young* (1803), seine Arbeit zitiert in *Jackson*¹: *T. Young, Experiments and Calculations Relative to Physical Optics*, Bakerian Lecture, November 24, 1803, publ. Phil. Trans. 1804, in: *G. Peacock* (Ed.), *Miscellaneous Works of Thomas Young*, Vol. I, John Murray, London, 1855, p. 179, esp. pp. 185}187.

⁹ nach *Jackson*¹, der hier auf *de Hulst*¹² verweist

¹⁰ nach *Jackson*¹, der hier *Young*⁸ zitiert

¹¹ *George Bidell Airy, On the intensity of light in the neighborhood of a caustic*, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* VI (1838), 379-403, und Supplement to the previous paper, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* VIII (1849), 595-600.

¹² siehe z. B. *Arnold Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Optik*, Bd. 4, 2. Auflage, § 43, S. 176

¹³ *H.C. Van de Hulst, Light Scattering by Small Particles*, Wiley, New York, 1957, Chapter 13.

¹⁴ *M. Abramowitz, I. Stegun, eds., Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.

¹⁵ 1 Zoll (inch) = 25,400 mm.

¹⁶ *Jackson*¹ gibt an $\eta_E = (1/0,745519)(\theta_E - \theta_0) = 1,34135 (\theta_E - \theta_0)$.

¹⁷ *L.D. Landau, E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields*, Pergamon, Oxford, 1962.

¹⁸ Ein Abriss der *Mie*'schen Theorie findet sich z. B. in *Ludger Prünte: Der Regenbogen - Prüfstein für optische Theorien*, Uttendorf-Vortrag. Internet-Adresse
<https://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/media.php/250/regenbogen.pdf>

¹⁹ *V. Khare und H.M. Nussenzveig: Theory of the Rainbow*, Phys. Rev. Letters **33**, p. 976 (1974)

Anhang A – Klassischer Streuquerschnitt

Der klassische Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Teilchen setzt voraus, dass diese im Sinne der Punktmechanik lokalisierbar sind. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit für eine Streuung wird *nicht* durch das Matrixelement eines Wechselwirkungsoperators beschrieben. Wellenfunktionen spielen keine Rolle.

Wir starten mit einem Strahl von Teilchen, die gleichmäßig über den Strahlquerschnitt verteilt sind. Die Teilchen treffen auf ein Streuzentrum und werden von diesem abgelenkt („gestreut“). Der Strahlquerschnitt sei so groß, dass Randeﬀekte nicht berücksichtigt werden müssen. Die Gerade in Strahlrichtung, die das Streuzentrum in der Mitte trifft, ist die *Strahlachse*. Gesucht ist die Anzahl der Teilchen, die in einen gegebenen Raumwinkelbereich gestreut werden, bezogen auf die Zahl der einfallenden Teilchen. Die Zahl der einfallenden Teilchen zählen wir pro Zeit- und (Querschnitts-)Flächeneinheit. Diese Größe ist die Stromdichte j_0 , also

$$(1) \quad j_0 = \frac{\text{Zahl der Teilchen im Strahl}}{\text{Meter}^2 \text{ Sekunde}}.$$

Da die Anordnung unseres (Gedanken-)Experiments rotationssymmetrisch zur Strahlachse ist, betrachten wir die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in den *Kegelring* mit Öffnungswinkeln zwischen θ und $\theta + d\theta$ gestreut werden (Abbildung 1). Diese Zahl dn ist proportional zu j_0 und dem Raumwinkel $d\Omega$, der durch den genannten Kegelring gegeben ist. Die Proportionalitätskonstante heißt per Definition *differentieller Wirkungsquerschnitt* $d\sigma/d\Omega$. Also gilt

$$(2) \quad dn =_{df} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \cdot j_0 d\Omega$$

oder

$$(3) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} =_{df} \frac{dn}{j_0 d\Omega}.$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gleich der Anzahl der Teilchen, die pro Raumwinkeleinheit gestreut werden, dividiert durch die Zahl der einfallenden Teilchen (wie schon oben formuliert).

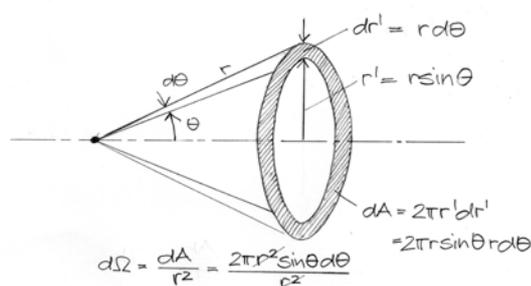


Abbildung 1 Berechnung des Raumwinkels

Der Raumwinkel $d\Omega$, der dem Kegelring zwischen θ und $\theta + d\theta$ entspricht, ergibt sich aus Abbildung 1 zu

$$(4) \quad d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Aus Gl. (2) folgt dann

$$(5) \quad dn =_{df} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \cdot j_0 \cdot 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Bei der klassischen Streuung wird ein *sphärisches* Potential vorausgesetzt. In diesem Fall ist der Abstand der Teilchen von der Strahlachse, genannt Stoß- oder Einfallparameter p , für den Ablenkwinkel entscheidend. Man nimmt an, dass *alle* Teilchen mit Stoßparametern zwischen p und $p + dp$ in den Kegelring zwischen θ und $\theta + d\theta$ abgelenkt werden (Abbildung 2). Das heißt, die

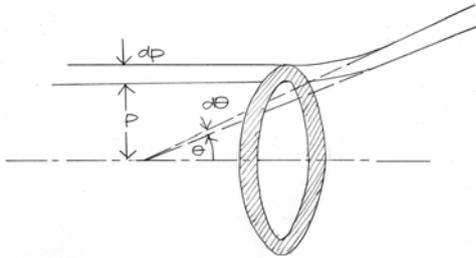


Abbildung 2 Stoßparameter und Streuwinkel

Wahrscheinlichkeit für eine Ablenkung (Streuung) ist proportional zur Fläche $2\pi p \cdot dp$ des Stoßparameter-Rings zwischen p und $p + dp$. Die Zahl der gestreuten Teilchen dn ergibt sich dann als Produkt aus j_0 und dieser Fläche $2\pi p dp$, also

$$(6) \quad dn = j_0 \cdot 2\pi p dp.$$

Setzt man die rechten Seiten der Gleichungen (5) und (6) gleich, erhält man

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \cdot j_0 \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = j_0 \cdot 2\pi p dp.$$

Daraus folgt als Term für den klassischen Streuquerschnitt $p dp / (\sin \theta d\theta)$. Da dp und $d\theta$ auch negativ sein können, der Querschnitt aber positiv ist, klammern wir den Term in Betragsstrichen:

$$(7) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{p dp}{\sin \theta d\theta} \right|.$$

Dies ist die gesuchte Formel. Sie setzt eine eindeutige, umkehrbare Zuordnung (genannt *klassische Ablenkfunktion*) zwischen p und θ voraus.

Beispiel *Rutherfordstreuung*: Ein Teilchen der Ladung $Z_1 e$ trifft mit der kinetischen Energie E auf ein schweres, ruhendes Teilchen der Ladung $Z_2 e$. Die Ablenkfunktion ist hier (ohne Herleitung)

$$p(\theta) = \frac{K}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

mit $K = Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0$. Daraus folgt

$$\frac{dp}{d\theta} = -\frac{K}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Setzt man beides in Gl. (7) ein (kleine Rechenübung), folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{K^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

der *Rutherford-Querschnitt*.

Die nachfolgenden Zeilen sind eine Ausarbeitung der Vorlesung von Prof. *Scherzer*¹, gehalten 1963 an der *TH Darmstadt*. Prof. *Scherzer* war ein Schüler *A. Sommerfelds*. Dessen Buch *Vorlesungen über Theoretische Physik*, hier insbesondere der Band *Optik*², ist nicht ohne Einfluss auf die Vorlesung gewesen. Meine damalige Mitschrift ist noch lesbar, hat aber einige Lücken. Die habe ich durch Rückgriff auf die *Optik Sommerfelds* versucht zu schließen.

1. Huygens'sches Prinzip

Die *Kirchhoff'sche* Beugungstheorie ist eine mathematische Formulierung des *Huygens'schen* Prinzips. Das *Huygens'sche* Prinzip besagt: Man kann den zukünftigen Verlauf einer beliebig vorgegebenen Wellenfläche bestimmen, indem man von jedem ihrer Punkte eine Kugelwelle ausgehen lässt und die Einhüllende aller dieser Kugelwellen konstruiert (wörtlich zitiert aus ²).

2. Green'scher Satz

Diese anschauliche Formulierung lässt offen, um was für eine Welle es sich handelt. Bei *Kirchhoff* (und seinen Vorgängern *Young* und *Fresnel*) jedenfalls ist es eine skalare Welle, wie sie z. B. aus der Akustik bekannt ist. Licht jedoch ist eine elektromagnetische und damit vektorielle Welle, die den *Maxwell'schen* Gleichungen (und den Randbedingungen des jeweiligen Problems) genügt. Also kann es sich bei der *Kirchhoff'schen* Welle höchstens um eine Hilfsvorstellung handeln³. Wir bezeichnen unsere Hilfsvorstellung mit dem Buchstaben *U* und verlangen, dass sie eine Lösung der Wellengleichung

$$(1) \quad \nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

mit *c* als Phasengeschwindigkeit ist. Das Zeitverhalten von *U* setzen wir an als monofrequente Schwingung mit der Kreisfrequenz ω , also

$$(2) \quad U = u \cdot \exp(-i\omega t) .$$

Dabei ist *u* der räumliche Anteil unserer Welle. Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$(3) \quad \nabla^2 u + k^2 u = 0$$

mit $k = \omega/c$. Das bedeutet, *u* genügt einer *Helmholtz-Gleichung* mit der Wellenzahl *k* als Parameter. *Kirchhoff's* Idee war es, diese Gleichung mit Hilfe des *Green'schen* Theorems zu lösen.

Zum *Green'schen* Satz gelangt man wie folgt: Ausgangspunkt ist der *Gauß'sche* Satz. Danach gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{A}

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} ,$$

wobei das Integral auf der linken Seite über das Volumen *V* zu nehmen ist, das von der *geschlossenen* Oberfläche *S* des Integrals auf der rechten Seite eingeschlossen wird. Setzen wir

$$\vec{A} = u \vec{\nabla} v ,$$

folgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) = u \nabla^2 v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v .$$

Das, in Gl. (4) eingesetzt, ergibt die erste *Green'sche* Identität oder *Green'sche Formel*

$$(4) \quad \int_V (u \nabla^2 v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v) dv = \int_S (u \vec{\nabla} v) \cdot d\vec{s}.$$

Schreibt man diese Gleichung noch einmal auf und vertauscht dabei u und v , folgt

$$\int_V (v \nabla^2 u + \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u) dv = \int_S (v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{s}.$$

Subtraktion beider Gleichungen voneinander ergibt die zweite *Green'sche* Identität oder den *Green'schen Satz*

$$(5) \quad \int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dv = \int_S (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{s}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird meist in anderer Form geschrieben. Dazu zieht man aus $d\vec{s}$ den Normalen-Einheitsvektor \hat{n} heraus, also den Vektor mit der Länge eins, der auf dem Flächenelement senkrecht steht. Man schreibt also

$$d\vec{s} = \hat{n} ds$$

und beachtet, dass gilt⁴

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla} \cdot \hat{n} = \frac{\partial}{\partial n}.$$

Dann wird Gl. (5) zu

$$(6) \quad \int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dv = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

(*Green'scher Satz* Gl. (5), alternative Formulierung).

3. Kirchhoff'scher Integralsatz

Wir machen uns jetzt daran, die *Helmholtz-Gleichung* für u zu lösen. Die Lösung ist eigentlich eine Umformung. Sie besteht darin, u an einem Ort P (bezeichnet mit u_P) auszudrücken durch die Werte von u und deren Ableitung auf einer geschlossenen Fläche S um P . Zunächst drücken wir u_P durch ein Integral über die *geschlossene* Oberfläche S aus. Dazu führen wir zusätzlich zu u eine Funktion

$$(7) \quad v = \frac{\exp(ikr)}{r}$$

ein, wobei r von P aus gemessen wird. Sie hat keine physikalische Bedeutung, ist also eine Art *virtuelle* Kugelwelle. Man kann sie als „Sonde“ betrachten, mit der u abgetastet wird². Jedenfalls genügt auch einer Helmholtz-Gleichung. Denn es ist

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r \frac{\exp(ikr)}{r} \right] = -k^2 \frac{\exp(ikr)}{r} = -k^2 v.$$

Setzen wir u und v in Gl. (5) ein, verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, da $u \nabla^2 v = v \nabla^2 u$.

Damit wird

$$\int_S (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{s} = 0,$$

also

$$\int_S \left[u \vec{\nabla} \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{\nabla} u \right] \cdot d\vec{s} = 0.$$

Die geschlossene Oberfläche S können wir uns als Kugel um den Punkt P denken. Das Integral hat nun eine Tücke: Im Punkt P mit $r = 0$ wird der Nenner der beiden Kugelwellenterme Null und der

Integrand singular. Deshalb umgeben wir P mit einer kleinen Kugel (Oberfläche S') und schließen ihn so von Oberfläche S aus (Abbildung 1). Das ergibt

$$(8) \quad \int_S \left(u \vec{\nabla} \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{\nabla} u \right) \cdot d\vec{s} + \int_{S'} \left(u \vec{\nabla} \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{\nabla} u \right) \cdot d\vec{s} = 0.$$

Beachte: das erste Integral geht über S , das zweite über S' (die Bezeichnungen unter dem Integralzeichen sind schlecht lesbar).

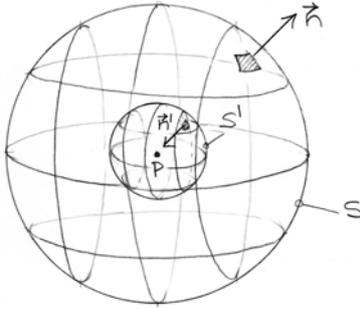


Abbildung 1 Geschlossene Oberfläche

Vom zweiten Integral ist der Grenzwert für $r \rightarrow 0$ zu bilden. Dazu überlegen wir: Auf der kleinen Kugel zeigt der Einheits-Normalenvektor \hat{n}' zum Punkt P hin. Damit zeigt der Einheitsvektor des Gradienten⁵, der radial nach außen gerichtet ist, in die zu \hat{n}' entgegengesetzte Richtung. Es gilt also

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = -\hat{n} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = -\hat{n} \frac{r ik \exp(ikr) - \exp(ikr)}{r^2} = \hat{n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \exp(ikr),$$

und weiter

$$(9) \quad \begin{aligned} \int_{S'} \left(u \vec{\nabla} \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{\nabla} u \right) \cdot d\vec{s} &= \int_{S'} \left[u \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \exp(ikr) \hat{n} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{S'} \left[u \frac{1 - ikr + r \partial u / \partial r}{r^2} \right] \exp(ikr) r^2 d\Omega \\ &= \int_{S'} \left[u - ikr + r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \exp(ikr) d\Omega \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt $\hat{n}' \cdot d\vec{s}$ wird dabei zum Betrag ds , da beide Vektoren gleich gerichtet sind. Wegen der Kugelsymmetrie gilt außerdem

$$ds = r^2 d\Omega,$$

wobei $d\Omega$ der von P aus gemessene Raumwinkel ist.

Lässt man nun die kleine Kugel schrumpfen, geht wegen $r \rightarrow 0$ der Term $\exp(ikr)$ im Integranden von Gl. (9) gegen Eins. In der eckigen Klammer verschwinden die letzten beiden Terme, und die Funktion u geht, da sie stetig ist, gegen ihren Wert u_P an der Stelle P . Die Integration über den gesamten Raumwinkel ergibt $4\pi u_P$ und Gl. (8) wird damit zu

$$(10) \quad u_P = \frac{1}{4\pi} \left[\int_S \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{\nabla} u \cdot d\vec{s} - \int_S u \vec{\nabla} \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot d\vec{s} \right].$$

Diese Gleichung⁶ ist eine exakte Umformung der skalaren Wellengleichung Gl. (3). Sie heißt auch *Kirchhoff'scher Integralsatz*⁷.

4. Sommerfeld'sche Formulierung des Huygens'schen Prinzips

Gleichung (10) besagt, dass u_P an der Stelle P gegeben ist durch den Wert von u und den Wert des Gradienten von u auf der Oberfläche S . Also Ziel erreicht, aber physikalisch gesehen kein Fortschritt gegenüber Gl. (3) – trotz eindrucksvoller mathematischer Formulierung. Denn die Randwerte von u und Gradient sind nach der Theorie der analytischen Funktionen nicht unabhängig voneinander. Das heißt, Gl. (10) ist nur dann von Nutzen, wenn wir die *richtigen* Randwerte kennen würden. In der Praxis ist das nicht der Fall. Hier stellt sich beispielsweise folgendes Problem: Die Oberfläche S besteht aus einer ebenen, Licht undurchlässigen Fläche mit einer Öffnung A , die von außen bestrahlt wird oder selbst leuchtet. Damit die Oberfläche geschlossen ist, denken wir uns ihren „Rest“ als Kugel um den Punkt P mit unendlich großem Radius (Abbildung 2). Als Randbedingungen „wünschen“ wir uns: (1) Im Licht undurchlässigen Bereich von S und in der

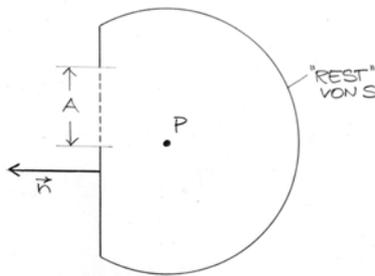


Abbildung 2 Oberfläche A und Rest

unendlich weit entfernten Kugelfläche soll sein $u = 0$ (was zumindest intuitiv richtig ist), (2) im Bereich der leuchtenden Öffnung A soll u ($u \neq 0$) eine Funktion sein, die wir vorgeben können. Gesucht ist die Wellenamplitude u_P im Punkt P .

Dieses Problem ist lösbar, wenn wir statt der Kugelwelle nach Gl. (7) für v setzen

$$(11) \quad G = \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr')}{r'}$$

In der theoretischen Physik bezeichnet man G als *Green'sche Funktion* (für das Problem des Halbraums). Warum dieser mathematische Trick funktioniert, soll hier nicht erörtert werden⁸. Jedenfalls erlaubt er uns, nur die Randwerte von u vorzuschreiben (und nicht auch den Gradienten anzugeben).

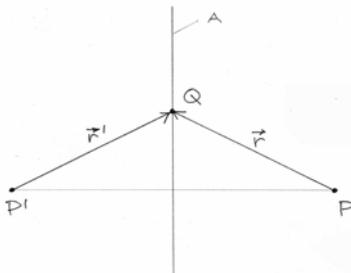


Abbildung 3 Punkt P und Spiegelpunkt P'

Abbildung 3 veranschaulicht die Bedeutungen von r und r' : Sei Q ein beliebiger Punkt auf dem ebenen Bereich der Fläche S . Dann ist \vec{r} der Vektor vom Punkt P nach Q und r sein Betrag. Wir spiegeln nun P am ebenen Bereich von S und erhalten den Spiegelpunkt P' im gegenüber liegenden Halbraum. Der Pfeil von P' nach Q ist dann der zu r' gehörende Vektor \vec{r}' . Es ist klar, dass die Beträge der beiden Vektoren gleich sind, dass also gilt $r = r'$. Setzen wir nun G nach Gl. (11) in Gl. (10) ein, erhalten wir

$$(12) \quad u_P = \frac{1}{4\pi} \left[\int_S \left(\frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr')}{r'} \right) \vec{\nabla} u \cdot d\vec{s} - \int_S u \vec{\nabla} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr')}{r'} \right) \cdot d\vec{s} \right]$$

In diesem Ausdruck verschwindet wegen $r = r'$ das erste Integral, und wir haben einen Ausdruck für u_P erhalten, in den nur noch die Randwerte von u eingehen (und nicht auch die des Gradienten von u).

Die zweite Eigenschaft von G ist die, dass sie die von uns gewünschten Randbedingungen (1) und (2) anzunehmen erlaubt. Auch hier übergehen wir den mathematischen Beweis, machen aber Gebrauch davon, dass u nur im Bereich der Öffnung ungleich Null ist. Das Integrationsgebiet, die geschlossene Fläche S , schrumpft daher zur Öffnungsfläche A :

$$(13) \quad u_P = -\frac{1}{4\pi} \int_A u \vec{\nabla} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr')}{r'} \right) \cdot d\vec{s} .$$

In diesem Integral ist zu beachten, dass der (Einheits-)Normalenvektor \hat{n} des Flächenelements ds nach „draußen“ zeigt, in das Gebiet, in dem sich der Spiegelpunkt P' befindet. Der Gradient ist also in dieser Richtung zu bilden. Diese Richtungsableitung ist nicht trivial. *Sommerfeld* geht in seinem Lehrbuch⁹ folgendermaßen vor: Der Punkt P habe, bezogen auf einen Nullpunkt O in der Fläche A ,

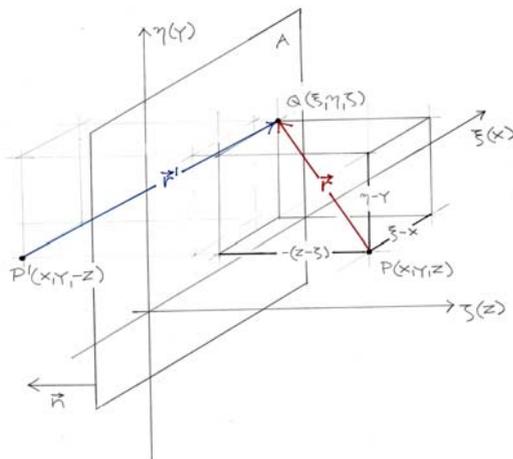


Abbildung 4 Zur Berechnung des Gradienten von G

die Koordinaten (x, y, z) , der Spiegelpunkt P' damit $(x, y, -z)$. Den Punkt Q nehmen wir vorübergehend aus der Fläche A heraus. Wir geben ihm die Koordinaten (ξ, η, ζ) mit $\zeta > 0$, auch vom Nullpunkt O aus gemessen. Dann gilt für dessen Abstände r und r' zum Punkt P (Abbildung 4)

$$(14) \quad \begin{aligned} r^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \\ r'^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2 \end{aligned}$$

Die Ableitung von G in Richtung von \vec{n} ist dann

$$(15) \quad (\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) G = -\frac{\partial G}{\partial \zeta} = -\left[\frac{d}{dr} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial \zeta} - \frac{d}{dr'} \left(\frac{\exp(ikr')}{r'} \right) \frac{\partial r'}{\partial \zeta} \right].$$

Aus Gl. (14) folgt nun

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2r} 2(\zeta - z) = \frac{\zeta - z}{r} \\ \frac{\partial r'}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2r'} 2(\zeta + z) = \frac{\zeta + z}{r'} \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) = \frac{r \exp(ikr) ik - \exp(ikr)}{r^2} = ik \frac{\exp(ikr)}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

und entsprechend für den Term mit r' . Wir benötigen die Ableitung

$$(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) G|_A = - \frac{\partial G}{\partial \zeta} |_A$$

auf der Oberfläche A . Die ist gegeben durch $r = r'$ und $\zeta = 0$ (Wir verlegen, anschaulich gesprochen, Q wieder zurück in die Fläche A). Dann folgt aus Gl. (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \zeta} &= \frac{-z}{r} = -\cos(\vec{n}, \vec{r}) \\ \frac{\partial r'}{\partial \zeta} &= \frac{+z}{r} = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \end{aligned}$$

und aus Gl. (15)

$$\begin{aligned} - \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial \zeta} - \frac{d}{dr'} \left(\frac{\exp(ikr')}{r'} \right) \frac{\partial r'}{\partial \zeta} \right] &= - ik \frac{\exp(ikr)}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \cdot [-\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r})] \\ &= 2ik \frac{\exp(ikr)}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \cdot \cos(\vec{n}, \vec{r}) \\ &\cong 2ik \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{r}) \end{aligned}$$

Dabei haben wir rechte Seite durch ihren Wert für Entfernungen r von A angenähert, die groß sind gegenüber der Wellenlänge λ . Der Term $1/(ikr)$ der Klammer fällt nämlich weg, wenn gilt

$$kr \gg 1 \quad \text{oder} \quad r \gg \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Setzen wir diesen Näherungswert in Gl. (13) ein, folgt

$$(17) \quad u_p = \frac{k}{2\pi i} \int_A u \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{r}) \, ds.$$

Diese Formel nennt *Scherzer* in seiner Vorlesung¹ die *Sommerfeld'sche* Formulierung des *Huygens'schen* Prinzips. Der \cos -Term heißt auch *Fresnel'scher* Konvergenzfaktor, er entspricht dem *Lambert'schen* Gesetz der Flächenhelligkeit. Ist die Ausdehnung der Öffnung A klein gegenüber r und liegt P senkrecht über dieser Fläche, ist $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \cong 1$ und die Formel wird zu

$$(18) \quad u_p = \frac{k}{2\pi i} \int_A u \frac{\exp(ikr)}{r} \, ds.$$

In dieser Form wird sie beispielsweise von *Jackson* in seinem Artikel über den *Regenbogen*⁹ verwendet.

Anmerkungen

¹ *Otto Scherzer, Vorlesung Optik aus der Reihe Theoretische Physik, TH Darmstadt, 1963*

² *A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Optik, 2. Auflage*

³ Argumente für und gegen die Auffassung der skalaren Welle als Modell für die Licht-, „Welle“ finden sich z. B. bei *Sommerfeld*², S. 177

⁴ Ein Beispiel zu

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial n}.$$

\vec{n} zeige in x -Richtung, also $\vec{n} = \hat{x}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, bestimme $\partial r / \partial n$:

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) r &= \hat{x} \cdot \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) r = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \end{aligned}$$

⁵ Der Gradient in Kugelkoordinaten (\hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$) sind die Einheitsvektoren in r -, θ - und ϕ -Richtung):

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Da v nur von r abhängt, verschwinden die Ableitungen nach θ und ϕ .

⁶ *A. Sommerfeld*², Gleichung (4) auf S. 178

⁷ Bei *E. Hecht, Optik* (deutsche Übersetzung), 2. Auflage, 1989, Addison-Wesley (Deutschland), Kap. 10.4, heißt der Satz *Kirchhoff'sches Integraltheorem*.

⁸ Offenbar wurde auch in Prof. *Scherzers* Vorlesung die Mathematik der *Green'schen* Funktion nicht sehr ausführlich behandelt, in meiner Mitschrift fehlen dazu Bemerkungen. Vielleicht habe ich sie auch damals nicht verstanden. Ich lasse diese Frage offen.

⁹ *J. D. Jackson: From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy, Physics Reports* 320 (1999), 27 – 36, Gl. (26)

Das Kirchhoff'sche Beugungsintegral

$$(1) \quad u_P = \frac{k}{2\pi i} \int_A u(\vec{x}') \frac{\exp(ikr)}{r} ds'$$

verknüpft die Wellenamplitude u_P an einem achsennahen Punkt P des Beobachtungsschirms mit der Amplitude $u(\vec{x}')$ in der beugenden Öffnung. Voraussetzung ist

$$kr \gg 1 \text{ oder } r \gg \lambda$$

(r = Abstand des Punktes P vom Ort \vec{x}' , k = Wellenzahl und λ = Wellenlänge). Diese Bedingung ist in der Regel erfüllt, wenn der Abstand L des Schirms von der beugenden Öffnung groß gegenüber der Wellenlänge ist.

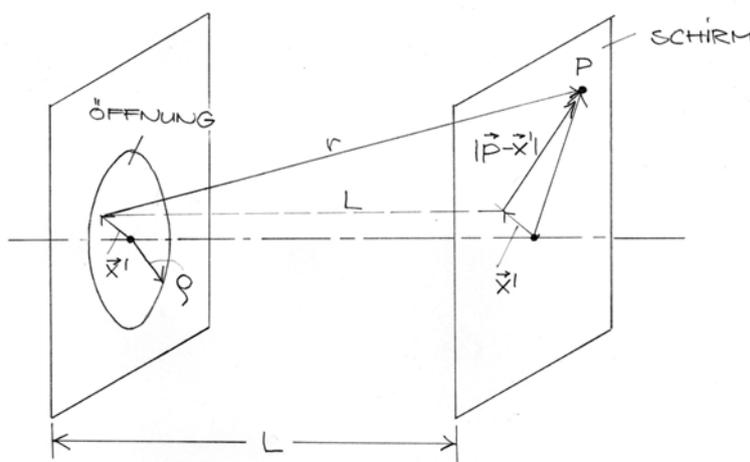


Abbildung 1 Skizze zu Gleichung (2)

Der Abstand r ist, wie Abbildung 1 zeigt, gegeben durch

$$(2) \quad r = \left(L^2 + |\vec{p} - \vec{x}'|^2 \right)^{1/2} = L \left(1 + \frac{|\vec{p} - \vec{x}'|^2}{L^2} \right)^{1/2}.$$

Das Produkt kr im Exponenten der e -Funktion ist daher eine nicht gerade einfache Funktion von \vec{x}' . Andererseits ist der zweite Term unter der Wurzel bei genügend großem L klein gegenüber Eins, so dass folgende Näherung möglich ist

$$(3) \quad \begin{aligned} kr &= kL \left(1 + \frac{|\vec{p} - \vec{x}'|^2}{L^2} \right)^{1/2} \cong kL + \frac{k}{2L} (p^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{x}' + x'^2) \\ &\cong k \left(L + \frac{p^2}{2L} \right) - \frac{k}{L} \vec{p} \cdot \vec{x}' + \frac{k}{2L} x'^2 \end{aligned}$$

Der erste Summand ist unabhängig von x' , der zweite linear und der dritte quadratisch in x' . Der von x' unabhängige Term führt als Exponent der e -Funktion zu einem konstanten Faktor, der vor das Integral gezogen werden kann. Verlangt man, dass der lineare Term für die Phase der vom Punkt x' ausgehenden Huygens'schen Elementarwelle alleine verantwortlich ist, muss der quadratische Term vernachlässigbar klein sein. Der maximale Wert von x' sei beispielsweise ρ (bei einer kreisförmigen

Lochblende wäre das der Radius der Öffnung). Die Bedingung wäre dann $k\rho^2/2L \ll 1$. Ist man etwas großzügiger, ersetzt man in dieser Ungleichung die Eins durch π und erhält

$$\frac{k\rho^2}{2L} \ll \pi$$

oder, nach L aufgelöst,

$$(4) \quad L \gg \frac{\rho^2}{\lambda}.$$

Das ist die Bedingung dafür, dass man im Exponenten von $\exp(ikr)$ nur den in x' linearen Term berücksichtigen muss. Der Vorteil ist die einfachere Berechnung des Integrals. Experimentell bedeutet das, den Abstand L des Beobachtungsschirms von der beugenden Öffnung so groß zu machen, dass sowohl $L \gg \lambda$ als auch $L \gg \rho^2/\lambda$ erfüllt sind. Die entsprechende Anordnung heißt *Fraunhofer'sche* Beobachtungsart.