

Modellversuch Regenbogen

Der Regenbogen entsteht durch Reflexion, Brechung und Dispersion der Strahlen des Sonnenlichts in einem Wassertropfen. In erster Näherung lässt er sich, wie *Descartes*¹ gezeigt hat, durch die Gesetze der Strahlenoptik erklären. Danach werden die parallel einfallenden Sonnenstrahlen beim Eintritt in den Tropfen gebrochen, dann ein- oder mehrmals total reflektiert und beim Austritt wiederum gebrochen. Einmalige Reflexion im Innern des Tropfens führt zum Regenbogen 1. Ordnung (Hauptregenbogen), zweimalige Reflexion zum Regenbogen 2. Ordnung (Nebenregenbogen) usw. Abbildung 1 zeigt den Strahlengang erster Ordnung.

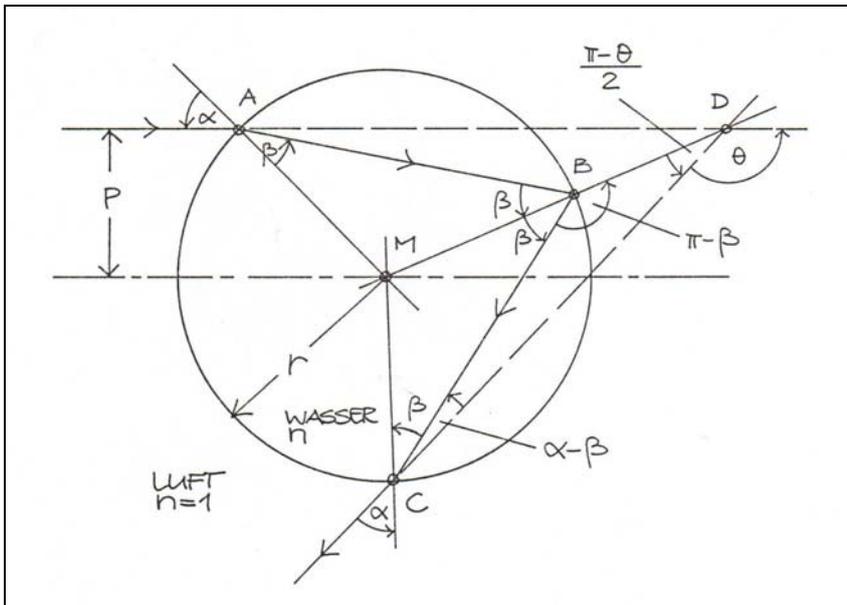


Abbildung 1 Lichtstrahl beim Durchgang durch einen Wassertropfen mit einmaliger Totalreflexion in Innern (Strahlengang erster Ordnung). Brechungs- und Reflexionswinkel hängen ab vom Einfallsp parameter p .

Descartes erklärt den Regenbogen, indem er Strahlen mit verschiedenem *Einfallsp parameter* auf den Tropfen einfallen lässt. Als Einfallsp parameter p (Abbildung 1) bezeichnet man den Abstand des Strahls vom Mittelpunkt des Tropfens. Verfolgt man den Verlauf dieser Strahlen durch den Tropfen, so stellt man fest, dass es einen kleinsten Ablenkwinkel θ_0 gibt und dass in der Umgebung dieses Winkels viele Einfallsp parameter zur Ablenkung beitragen. Die Strahlen bilden eine *Kaustik* (Brennlinie). Das bedeutet, dass hier die Lichtintensität groß ist. Das Auge registriert diese erhöhte Intensität als Regenbogen. Bei der zweimaligen Brechung des Strahls wird dieser spektral zerlegt, so dass der Ablenkwinkel θ_0 für die verschiedenen Wellenlängen, die im Licht der Sonne enthalten sind, unterschiedlich ist. Das erklärt die Farben des Regenbogens.

Zur Berechnung des Winkels θ_{01} erster Ordnung (Hauptregenbogen) beachte zunächst die Symmetrie des Strahlengangs bezüglich der Achse MD (Abbildung 1), die durch das Reflexionsgesetz bedingt ist. Daraus folgt, da die Innenwinkelsumme im Dreieck BCD gleich π ist,

$$(1) \quad \pi = \pi - \beta + \frac{1}{2}(\pi - \theta) + (\alpha - \beta).$$

Außerdem gilt das *Snellius*'sche Brechungsgesetz

$$(2) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

wobei n der Brechungsindex des Wassers ist. Aus der Trigonometrie ergibt sich, wenn r der Radius des Tropfens ist, $\sin \alpha = p/r$. Damit folgt für den Ablenkwinkel θ als Funktion des

Einfallsparameters p die Gleichung²

$$(3) \quad \theta = 2 \cdot \arcsin \frac{p}{r} - 4 \cdot \arcsin \frac{p}{nr} + \pi.$$

Das Minimum dieser Funktion ermittelt man mit Hilfe der Differentialrechnung. Zur Abkürzung setze $x = p/r$. Dann untersuche, an welcher Stelle x_{01} die Ableitung von $\theta(x)$ das Vorzeichen wechselt. Wegen der Stetigkeit von $\theta(x)$ ist dies die gesuchte Stelle x_{01} . Das Ergebnis ist

$$(4) \quad x_{01} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}},$$

woraus für $n = 1,33$ ein Wert $x_{01} = 0,8623$ folgt. Nach Gl. (3) entspricht dem ein Winkel $\theta(x_{01}) = \theta_{01} = 137,5^\circ$. Der Winkel $180^\circ - \theta_{01} = 42,5^\circ$ ist der Öffnungswinkel des Kegels, auf dessen Mantel der (von der Sonne abgewandte) Beobachter den (Haupt-)Regenbogen sieht. Für die Regenbögen zweiter und höherer Ordnung ergibt die Rechnung, wenn man die Ordnung des Regenbogens mit m bezeichnet, die Ablenkwinkel

$$(5) \quad \theta_m = 2 \cdot \arcsin \frac{p}{r} - (2 + 2m) \cdot \arcsin \frac{p}{nr} + m\pi, \quad m = 2, 3, \dots$$

und

$$(6) \quad x_{0m} = \sqrt{\frac{(1+m)^2 - n^2}{(1+m)^2 - 1}}.$$

Daraus folgt für den Nebenregenbogen ($m = 2$) $\theta_{02} = 230,9^\circ$ und als Öffnungswinkel des Kegels, unter dem dieser beobachtet wird, $\theta_{02} - 180^\circ = 50,9^\circ$.

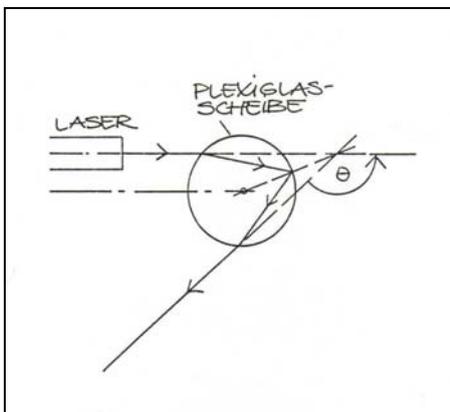


Abbildung 2 Prinzip der Versuchsanordnung

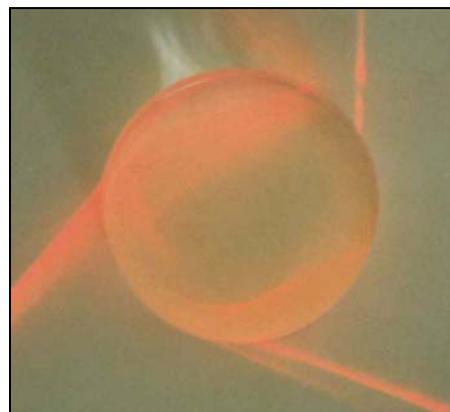


Abbildung 3 Foto eines Strahlenverlaufs in der Acrylglasplatte

Wir studieren die Physik des Regenbogens anhand eines Modellversuchs. Zunächst interessiert uns der Verlauf eines Lichtstrahls durch den Wassertropfen – und zwar sowohl im Fall einmaliger Reflexion (Hauptregenbogen, Abbildung 1) als auch zweimaliger Reflexion in Innern des Tropfens (Nebenregenbogen). Als Lichtquelle benutzen wir einen *HeNe*-Laser, und den Wassertropfen ersetzen wir der einfacheren Handhabung wegen durch eine kreisförmige Acrylglasplatte (Durchmesser $\varnothing = 9$ cm, Höhe etwa 1 cm). Wegen des von $n = 1,33$ abweichenden Brechungsindex von Acrylglas ($n_{ACRYLGLAS} = 1,49$) ergeben sich für die Ablenkwinkel θ_{01} und θ_{02} jetzt andere als die oben genannten Werte. Gleichungen (3) bis (6) sind aber weiterhin gültig.

Das Prinzip der Versuchsanordnung zeigt Abbildung 2. Die Acrylglasplatte liegt auf einer Unterlage von weißem Papier, ihre Position darauf wird markiert (Umrisszeichnung). Durch Verschieben des Lasers senkrecht zur optischen Achse variieren wir den Einfallsparameter p . Der Laserstrahl wird so ausgerichtet, dass er nicht nur die Platte durchsetzt, sondern auch die

Unterlage ein wenig streift. Dadurch lässt sich der Strahlengang durch die Acrylglasplatte verfolgen. Abbildung 3 ist ein (nicht sehr gelungenes) Foto eines solchen Strahlenverlaufs. Die Richtungen des einfallenden und austretenden Strahls werden auf dem Papier markiert, so dass der Ablenkwinkel θ direkt (Winkelmesser) abgelesen werden kann. Abbildung 4 zeigt die so erhaltenen Strahlrichtungen für verschiedene Einfallspareter p .

p / mm	$x = p / r$	θ_1 / Grad	θ_2 / Grad
5	0,11	175,7	347
10	0,22	169,7	333,5
15	0,33	166,5	321
20	0,44	163,5	310
22,5	0,50	161,0	303,5
25	0,55	159,8	297
27,5	0,61	158,5	292
30	0,67	157,6	286
32,5	0,72	156,5	278
35	0,78	156,0	273
37,5	0,83	156,5	268
40	0,88	159,1	–
42,5	0,94	164,5	265
43	0,96	169,0	268
44	0,98	174,3	269

Tabelle 1 Ablenkwinkel θ des Laserstrahls beim Durchgang durch eine kreisförmige Acrylglasplatte, als Funktion des Einfallspareters $x = p/r$. Winkel θ_1 gilt für den Strahl 1. Ordnung (Hauptregenbogen), θ_2 für den Strahl 2. Ordnung (Nebenregenbogen).

Wir bestimmen die Ablenkwinkel θ_1 und θ_2 der Strahlen erster bzw. zweiter Ordnung (Haupt- bzw. Nebenregenbogen), Tabelle 1 listet die Werte auf.

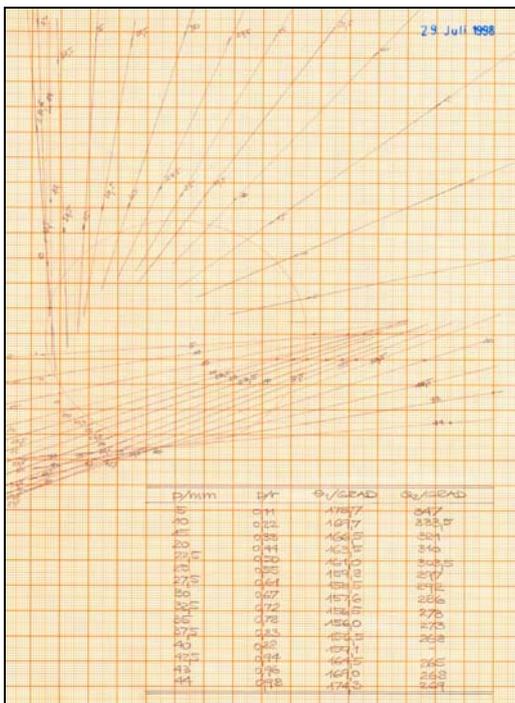


Abbildung 4 Protokoll der Messung, siehe Text.

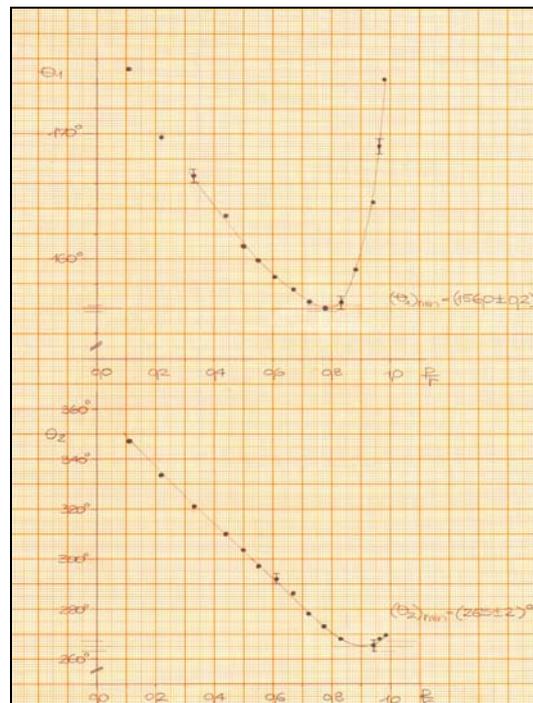


Abbildung 5 Ablenkwinkel θ als Funktion des Stoßpareters $x = p/r$. Die Minimalwerte von θ sind die Regenbogenwinkel.

Zum Vergleich mit der Theorie tragen wir θ_1 und θ_2 als Funktion von $x = p/r$ auf. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5. Als minimale Ablenkwinkel erhalten wir

$$\theta_{01} = 156,0^\circ \pm 0,2^\circ$$

$$\theta_{02} = 265,0^\circ \pm 2,0^\circ$$

Die zugehörigen Stoßparameter sind

$$x_{01} = 0,78 \pm 0,03$$

$$x_{02} = 0,91 \pm 0,06$$

Aus diesen folgen nach Gl. (6) die Brechungsindizes

$$n_1 = 1,475 \pm 0,049$$

$$n_2 = 1,54 \pm 0,29$$

Das gewichtete Mittel dieser Werte ist

$$n = 1,48 \pm 0,02,$$

in guter Übereinstimmung mit dem Literaturwert $n = 1,49$.

In einem weiteren Versuch geht es um die Dispersion, das heißt, die Auffächerung des Sonnenlichts in die Regenbogenfarben. Wir ersetzen die Sonne durch einen Diaprojektor, dessen Licht wir durch eine Schlitzblende treten lassen und in dem wir den Abstand zwischen Blende und Objektiv so einrichten, dass ein nahezu paralleles Bündel entsteht. Dabei achten wir darauf, dass die Blende nicht zu heiß wird (kurze Beobachtungszeiten). Das Spektrum der Strahlung, die von der Glühwendel der Projektorlampe erzeugt wird, sollte in grober Näherung dem des Sonnenlichts entsprechen. Bestrahlt wird ein Acrylglaszylinder (Durchmesser 3 cm, Höhe 5 cm), dessen Achse parallel zur Schlitzblendenöffnung verläuft. Abbildung 6 zeigt den prinzipiellen Aufbau, Abbildung 7 die Ausführung. Wie erwartet, zeigen sich auf einem seitlich angebrachten Schirm die beiden Regenbögen. Auch die in Natur beobachtete Abdunklung zwischen Haupt- und Nebenregenbogen (*Alexander's Dunkelzone*³) ist zu sehen.

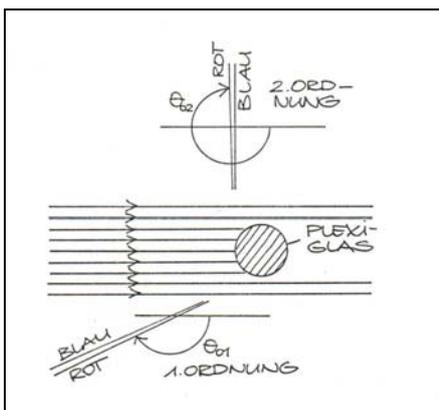


Abbildung 6 Regenbogen-Modellversuch, Prinzip

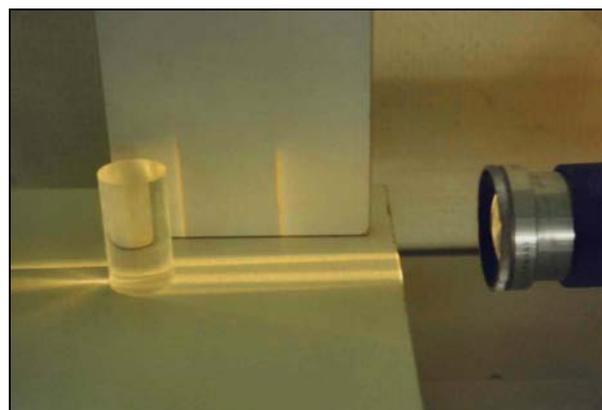


Abbildung 7 Regenbogen-Modellversuch, Ausführung mit Diaprojektor

Um ein grobes Maß für die Dispersion zu erhalten, bestimmen wir (wiederum nach der Methode des streifenden Einfalls) die Ablenkwinkel erster und zweiter Ordnung für die beiden Farben *rot* und *blau* in unserem Modell-Regenbogen. Der Unterschied der Winkel für die beiden Farben ist zwar nicht viel größer als 1° , die Winkel lassen sich aber mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 0,5^\circ$ ablesen, so dass die Differenz einschließlich Fehlerbalken von Null verschieden ist. Tabelle 2 enthält die Messwerte und die daraus folgenden Brechungsindizes. Die Brechungsindizes wurden

aus den Graphen der Abbildung 8 abgelesen, die den Ablenkwinkel θ in Abhängigkeit vom Brechungsindex n zeigen. Berechnet wurden die Kurven nach Gln. (5) und (6).

Ordnung	$(\theta_1)_{\text{Rot}} / \text{Grad}$	n_{Rot}	$(\theta_2)_{\text{Blau}} / \text{Grad}$	n_{Blau}
1	$156,8 \pm 0,5$	$1,496 \pm 0,006$	$158,0 \pm 0,5$	$1,509 \pm 0,006$
2	$265,5 \pm 0,5$	$1,493 \pm 0,003$	$267,7 \pm 0,5$	$1,505 \pm 0,003$

Tabelle 2 Ablenkwinkel und Brechungsindizes für die beiden Regenbogenfarben rot und blau. Die Brechungsindizes wurden aus Abbildung 8 abgelesen.

Die Mittelwerte der Brechungsindizes für die beiden Farbkomponenten in Tabelle 2 sind

$$n_{\text{Rot}} = 1,494 \pm 0,001$$

$$n_{\text{Blau}} = 1,506 \pm 0,002.$$

Nimmt man in grober Näherung für die entsprechenden Wellenlängen an

$$\lambda_{\text{Rot}} = 700 \text{ nm}$$

$$\lambda_{\text{Blau}} = 450 \text{ nm},$$

folgt für die Änderungsrate des Brechungsindex mit der Wellenlänge

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} &= \frac{(1,494 \pm 0,001) - (1,506 \pm 0,002)}{(700 - 450) \text{ nm}} \\ &= - (4,8 \pm 1,2) \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1} \end{aligned}$$

Dieser Wert ist, wie aus Tabellen in der Literatur hervorgeht, von der richtigen Größenordnung. Ein quantitativer Vergleich mit einem theoretischen Wert ist unter Vorbehalt möglich. Hier ein Versuch, diesen aus den optischen Daten des Herstellers⁴ für PlexiglasTM abzuschätzen:

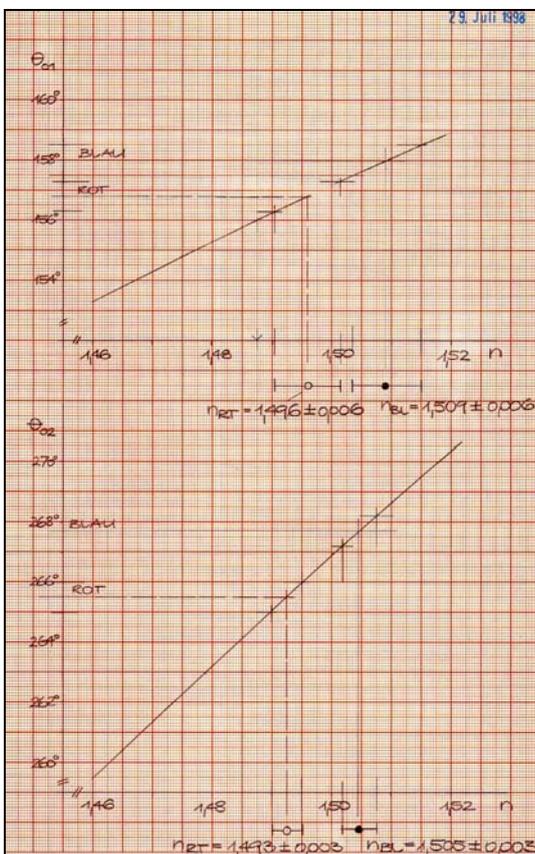


Abbildung 8 Minimale Ablenkwinkel θ_0 (Regenbogenwinkel) als Funktion des Brechungsindex

Der Hersteller³ gibt als *Abbé*'sche Zahl an $v_D = 57,5$ und als zugehörigen Brechungsindex $n_D = 1,492$. Wegen

$$v_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

(Definition der *Abbé*'schen Zahl v) folgt daraus für die Differenz der Brechungsindizes n_F und n_C

$$n_F - n_C = \frac{1,492 - 1}{57,5} = 0,00856.$$

Mit den Werten für die Wellenlängen der *C*- und *F*-Linien

$$\lambda_F = 486,1237 \text{ nm}$$

$$\lambda_C = 656,2725 \text{ nm}$$

ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_{FC}}{\Delta \lambda_{FC}} &= \frac{0,00856}{(486,1237 - 656,2725) \text{ nm}}, \\ &= -5,0 \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem oben angegebene Wert. Das heißt, unsere im Modellversuch grob bestimmte Dispersion ist von der richtigen Größenordnung.

Anmerkungen

¹ *Descartes* (1596 – 1650), französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler, formulierte als Erster die Strahlenoptik des Regenbogens. Die erste wellenoptische Behandlung geht zurück auf *Airy* (1838). Eine umfassende Darstellung der Theorie des Regenbogens findet sich in dem Buch von *van de Hulst*, *Light Scattering by Small Particles*, J. Wiley, New York 1957. *Ford* und *Wheeler* behandeln die quantenmechanische Streuung in halbklassischer Näherung mit der Regenbogenstreuung als einen Sonderfall, in *Ann. Physics* 7, S. 250 (1959). Numerische Rechnungen wurden von *Nussenzweig* ausgeführt, z. B. *Khare und Nussenzweig*, *Phys. Rev. Letters* 33, S. 976 (1974).

² Gleichung (3) lässt sich auch herleiten, indem man die Ablenkwinkel bei Ein- und Austritt, also $2(\alpha - \beta)$ und Reflexion $(\pi - 2\beta)$ addiert:

$$\theta = 2(\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) = 2\alpha - 4\beta + \pi.$$

Mit $\alpha = \arcsin(p/r)$ und $\beta = \arcsin(p/nr)$ erhält man Gl. (3).

³ *Alexander von Aphrosisias* (um 200 n. Chr.)

⁴ *Evonik, Röhm und Haas (PlexiglasTM)*