In der Arbeit von *M. G. Olsson*: *Spherical Pendumlum Revisited* [1] wird die Formel für die Präzessions-Winkelgeschwindigkeit des sphärischen Pendels hergeleitet. An einer Stelle dieses Artikels heißt es: „This substitution …. takes a few steps." – gemeint sind Rechenschritte, die nicht explizit aufgeführt werden. Hier der Versuch, diese und weitere fehlenden Zwischenschritte in den Rechnungen nachzuvollziehen. Es ließ sich nicht vermeiden, dabei einige Formulierungen von *Olsson* zu übernehmen. Um die hier aufgeführten Rechnungen an der richtigen Stelle des Artikels einordnen zu können, ist die Nummerierung der Kapitel und Gleichungen in den nachfolgenden Zeilen mit denen der Arbeit von *Olsson* identisch.

1. Bewegungsgleichungen (Equations of Motion)

Das Pendel habe die Masse *m*, die Länge des Pendelfadens sei *l*, und die Zugkraft, die der Faden auf den Pendelkörper ausübt, werde *T* genannt. Dann lautet die Bewegungsgleichung für den Pendelkörper nach Newton

$$(1) \qquad m\ddot{\vec{r}} = mg\vec{e}_z - T\vec{e}_r\,.$$

Dabei sind $\vec{e}_z$ und $\vec{e}_r$ Einheitsvektoren und $\ddot{\vec{r}}$ ist die zweite Ableitung der Pendelposition $\vec{r}$ nach der Zeit. Wir führen Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)[2]

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= l\sin\theta\cos\phi \\ y &= l\sin\theta\sin\phi \\ z &= l\cos\theta \end{aligned}$$

ein mit

$$(3) \qquad r = l\,.$$

Dabei ist *l* die Länge *l* des Pendelfadens. Jetzt ist $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ zweimal nach der Zeit zu differenzieren, wobei *x*, *y*, und *z* durch Gl. (2) gegeben sind und die Einheitsvektoren konstant bleiben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi - l\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\phi} \\ \dot{y} &= l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi + l\sin\theta\cos\phi\cdot\dot{\phi} \\ \dot{z} &= -l\sin\theta\cdot\dot{\theta} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\cos\phi + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\cos\phi - l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cdot\dot{\phi} \\ &\quad - l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cdot\dot{\phi} - l\sin\theta\cos\phi\cdot\dot{\phi}^2 - l\sin\theta\sin\phi\cdot\ddot{\phi} \\ \ddot{y} &= -l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\sin\phi + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\sin\phi + l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi\cdot\dot{\phi} \\ &\quad + l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi\cdot\dot{\phi} - l\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\phi}^2 - l\sin\theta\cos\phi\cdot\ddot{\phi} \\ \ddot{z} &= -l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Die Zerlegung der Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten lautet

(4) $$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_\theta - \sin\phi\,\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y &= \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_\theta + \cos\phi\,\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z &= \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \end{aligned} .$$

Damit wird die zweite Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = {} & (-l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\cos\phi + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\cos\phi - l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cdot\dot{\phi} \\ & - l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cdot\dot{\phi} - l\sin\theta\cos\phi\cdot\dot{\phi}^2 - l\sin\theta\sin\phi\cdot\ddot{\phi})\cdot(\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_\theta - \sin\phi\,\vec{e}_\phi) + \\ & (-l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\sin\phi + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\sin\phi + l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi\cdot\dot{\phi} \\ & + l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi\cdot\dot{\phi} - l\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\phi}^2 + l\sin\theta\cos\phi\cdot\ddot{\phi})\cdot(\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_\theta + \cos\phi\,\vec{e}_\phi) + \\ & (-l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\cdot\ddot{\theta})\cdot(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

$$= -l\left[(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta)\cdot e_r + (\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\cdot\vec{e}_\theta + (\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\cdot\vec{e}_\phi\right]$$

Die Bewegungsgleichung in Vektorschreibweise (r, θ und ϕ- Komponenten, von oben nach unten notiert) lautet dann

$$ml\cdot\begin{pmatrix} \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta \\ \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \\ \ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix} = mg\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} - T\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

In Komponenten aufgeteilt erhält man

(5a) $T = mg\cos\theta + ml(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta)$,

(5b) $\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ und

(5c) $\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta = 0$.

2. Umformung in kartesische Koordinaten (Cartesian Coordinate Transformation)

Die Rücktransformation in kartesische Koordinaten (x, y, z) ist sinnvoll, da wir kleine Ausschläge in x und y betrachten und näherungsweise $z = l$ gilt. Aus den oben aufgeführten Gleichungen für x, y, z und deren Ableitungen ergibt sich

$$x^2 + y^2 = l^2\sin^2\theta$$

Diese Größe kürzen wir mit ρ^2 ab, also[3]

(6) $\rho^2 = x^2 + y^2 = l^2\sin^2\theta$.

Weiterhin folgt

$$
\begin{aligned}
\dot{x}\,x \;+\; \dot{y}\,y \;&=\; (l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi \;-\; l\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\phi})\,l\sin\theta\cos\phi \\
&\quad + (l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi \;-\; l\sin\theta\cos\phi\cdot\dot{\phi})\,l\sin\theta\sin\phi \\
&=\; l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\phi\, l\sin\theta\cos\phi \\
&\quad + l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\;l\sin\theta\sin\phi \\
&=\; l^2\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta}\cdot(\cos^2\phi \;+\; \sin^2\phi) \\
&=\; l^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{6}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^2 \;+\; \dot{y}^2 \;&=\; l^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\cos^2\phi \;-\; 2l^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi\cdot\dot{\theta}\dot{\phi} \;+\; l^2\sin^2\theta\sin^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 \\
&\quad + l^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\sin^2\phi \;-\; 2l^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\cos\phi\cdot\dot{\theta}\dot{\phi} \;+\; l^2\sin^2\theta\cos^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 \\
&=\; l^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2(\cos^2\phi \;+\sin^2\phi) \\
&\quad + l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2(\sin^2\phi \;+\; \cos^2\phi) \\
&=\; l^2(\dot{\theta}^2\cos^2\theta \;+\; \dot{\phi}^2\sin^2\theta)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Auch die beiden nächsten Terme gehören noch zu Gl. (6) bei *Olsson*:

$$
\begin{aligned}
x\ddot{x} \;+\; y\ddot{y} \;&=\; -\,l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\cos^2\phi + l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\cos^2\phi - l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi\cdot\dot{\phi} \\
&\quad - l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi\cdot\dot{\phi} - l^2\sin^2\theta\cos^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 - l^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\cdot\ddot{\phi} \\
&\quad - l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\sin^2\phi + l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\sin^2\phi + \; l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi\cdot\dot{\phi} \\
&\quad + l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi\cdot\dot{\phi} - l^2\sin^2\theta\sin^2\phi\cdot\dot{\phi}^2 \;- l^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi\cdot\ddot{\phi} \\
&=\; -l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 \;+\; l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \;-\; l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\phi}^2 \\
&=\; l^2\sin\theta\;\;(\ddot{\theta}\cos\theta \;-\; \dot{\theta}^2\sin\theta \;-\; \dot{\phi}^2\sin\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\dot{y} \;-\; y\dot{x} \;&=\; l^2\sin^2\theta\cos^2\phi\cdot\dot{\phi} \;+\; l^2\sin^2\theta\sin^2\phi\cdot\phi \\
&=\; l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\phi}
\end{aligned}
$$

Jetzt sind wir in der Lage, Gleichungen (5) in kartesischen Koordinaten auszudrücken. Wir betrachten zunächst Gleichung (5c). Die linke Seite dieser Gleichung ist die zeitliche Ableitung von $\dot{\phi}\sin^2\theta$, dividiert durch $\sin\theta$:

$$
\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) \;=\; \ddot{\phi}\sin\theta \;+\; \dot{\phi}\,2\cos\theta\cdot\dot{\theta}\;,
$$

also gilt

$$
\frac{1}{l^2}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) \;=\; \frac{d}{dt}(x\dot{y} \;-\; y\dot{x}) \;=\; 0\;. \tag{8}
$$

Diese Gleichung drückt die Erhaltung der Drehimpulskomponente L_z in z-Richtung aus. Denn es ist

$$\vec{L} = m\vec{v}\times\vec{r} = m\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}\dot{y}z - \dot{z}y\\ -\dot{x}z + \dot{z}x\\ \dot{x}y - \dot{y}x\end{pmatrix} .$$

Für uns relevant ist die Folgerung

$$(9)\qquad \begin{aligned}\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x} &= 0\\ x\ddot{y} &= y\ddot{x}\end{aligned} .$$

Die Umwandlung der Terme von Gleichung (5b) in kartesische Koordinaten ist schwierig. Leichter ist es, in umgekehrter Richtung vorzugehen. Das heißt, die in kartesischen Koordinaten formulierte Gl. (10) zurück zu verwandeln in Gl. (5b). Gleichung (10) lautet

$$(10)\qquad x\ddot{x} + y\ddot{y} + \frac{1}{l^2}\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{1}{l^2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \omega_0^2(x^2 + y^2)\sqrt{1-\frac{\rho^2}{l^2}} = 0 .$$

Schreibt man die Terme in x und y und deren Ableitungen der Reihe nach aus Gl. (6) ab, erhält man

$$l^2\sin\theta\,(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta - \dot{\phi}^2\sin\theta) + \frac{1}{l^2}\frac{l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\frac{l^2\sin^2\theta}{l^2}} +$$
$$\frac{1}{l^2}l^4\dot{\phi}^2\sin^4\theta + \omega_0^2 l^2\sin^2\theta\sqrt{1-\frac{l^2\sin^2\theta}{l^2}} = 0$$

oder kürzer

$$l^2\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta - l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + l^2\dot{\phi}^2\sin^4\theta + \omega_0^2 l^2\sin^2\theta\cos\theta = 0 .$$

Es folgt

$$l^2\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta - l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) + \omega_0^2 l^2\sin^2\theta\cos\theta = 0 .$$

Division durch $l^2\cos\theta\sin\theta$ ergibt schließlich

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \omega_0^2\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 0$$

und damit Gl. (5b):

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + \omega_0^2\sin\theta = 0 .$$

In Gl. (10) sollen laut *Olsson* nun dritter und vierter Summenterm zusammengefasst werden. Das ist eine echte Herausforderung. Wir ergänzen diese Terme zunächst durch Addition und Subtraktion von

$$\frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}}$$

und erhalten

$$\frac{1}{l^2}\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{1}{l^2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 =$$

$$\frac{1}{l^2}\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} - \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{1}{l^2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} - \frac{1}{l^2}\frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{\rho^2}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}}$$

$$+ \frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2 l^2(1-\frac{\rho^2}{l^2})}\left\{l^2(x\dot{x} + y\dot{y})^2 - \rho^2(x\dot{x} + y\dot{y})^2 + l^2(x\dot{y} - y\dot{x})^2 - \rho^2(x\dot{y} - y\dot{x})^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}}$$

$$+\frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2 l^2(1-\frac{\rho^2}{l^2})}\left\{l^2(x\dot{x})^2 + l^2(y\dot{y})^2 - \rho^2(x\dot{x})^2 - \rho^2(y\dot{y})^2 + l^2(x\dot{y})^2 - l^2(y\dot{x})^2 - \rho^2(x\dot{y})^2 - \rho^2(y\dot{x})^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}}$$

$$+\frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2(l^2-\rho^2)}\left\{(x\dot{x})^2(l^2-\rho^2) + (y\dot{y})^2(l^2 - \rho^2) + y)^2 + (x\dot{y})^2(l^2 - \rho^2) - (y\dot{x})^2(l^2 - \rho^2)\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\left\{(x\dot{x})^2 + (y\dot{y})^2 + y)^2 + (x\dot{y})^2 - (y\dot{x})^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\left\{x^2(\dot{x} + \dot{y}^2) + y^2(\dot{x}^2 + \dot{y})^2\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\left\{(x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right\}\right]$$

$$= \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Der Term $x\ddot{x} + y\ddot{y}$ in Gl. (10) wird mit Hilfe von Gl. (9), das heißt $x\ddot{y} = y\ddot{x}$, umgeformt zu

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = x\ddot{x} + \frac{y^2\ddot{x}}{x} = \frac{1}{x}\ddot{x}(x^2 + y^2) .$$

Damit wird Gl. (10) zu

$$\frac{1}{x}\ddot{x}(x^2 + y^2) + \frac{\rho^2}{l^4}(x\dot{x} + y\dot{y})^2 \frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{\rho^2}{l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega_0^2(x^2 + y^2)\sqrt{1-\frac{\rho^2}{l^2}} = 0$$

.

Multiplikation dieser Gleichung mit $x/(x^2 + y^2) = x/\rho^2$ liefert

(12) $$\ddot{x} + \frac{x}{l^2}(x\dot{x} + y\dot{y})^2 \frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} + \frac{x}{l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega_0^2\, x\sqrt{1-\frac{\rho^2}{l^2}} = 0$$

und die entsprechende Gleichung für $\ddot{y}$. Gleichung (12) ist (noch) exakt.

Wir machen jetzt Gebrauch von der Voraussetzung, dass es sich um eine Schwingung mit kleinen Auslenkungen handelt – das heißt, es gilt $x, y << l$. Dazu entwickeln wir die Terme mit ρ^2/l^2 :

$$\frac{1}{1-\frac{\rho^2}{l^2}} = 1 + \frac{\rho^2}{l^2} -+ ....$$

und

$$\sqrt{1-\frac{\rho^2}{l^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{l^2} +- ....$$

und behalten nur Terme bis zur dritten Ordnung. Damit fällt der zweite Summenterm in Gl. (12) weg und der Term mit der Quadratwurzel wird näherungsweise zu

$$\omega_0^2\, x\sqrt{1-\frac{\rho^2}{l^2}} = \omega_0^2\, x(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{l^2}) = \omega_0^2\, x - \frac{1}{2}\omega_0^2\frac{x}{l^2}(x^2 + y^2) .$$

Unsere Differentialgleichungen für $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ lauten dann

(13a) $$\ddot{x} + \omega_0^2\, x - \frac{1}{2}\omega_0^2\frac{x}{l^2}(x^2 + y^2) + \frac{x}{l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

(13b) $$\ddot{y} + \omega_0^2\, y - \frac{1}{2}\omega_0^2\frac{y}{l^2}(x^2 + y^2) + \frac{y}{l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0 .$$

3. Infinitesimale Auslenkungen (Infinitesimal Displacements)

Betrachtet man *sehr* kleine Auslenkungen, kann man auch die kubischen Terme vernachlässigen. Dann erhält man für $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ die bekannte Differentialgleichung für eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0. Lenkt man das Pendel zur Zeit $t = 0$ in x-Richtung um die Strecke a aus und gibt ihm gleichzeitig einen kleinen Stoß in y-Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{y} = b\,\omega_0$, dann lautet die Lösung

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega_0 t \\ y &= b\sin\omega_0 t \end{aligned} \quad . \tag{16}$$

Sie entspricht einer stationären Ellipse mit den Halbachsen a und b entlang der x- bzw. y-Richtung.

4. Endliche Auslenkungen (Finite Displacements)

Die Terme dritter Ordnung in Gl. (13) koppeln die Differentialgleichungen für die beiden Bewegungsrichtungen und bewirken, dass die Ellipse um ihren Mittelpunkt rotiert, ihre Schwingungsdauer geringfügig ändert und dass höhere Harmonische zur Bewegung beitragen. Wir berücksichtigen diesen Sachverhalt, indem wir ein Koordinatensystem x' und y' einführen, dass mit der Winkelgeschwindigkeit Ω gegenüber unserem x, y-System rotiert. Das heißt, es ist

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\Omega t \;-\; y'\sin\Omega t \\ y &= x'\sin\Omega t \;+\; y'\cos\Omega t \end{aligned} \quad . \tag{17}$$

Dabei ist die Bewegung im rotierenden System stationär und, abgesehen von kleinen Termen höherer Harmonischer, gegeben durch

$$\begin{aligned} x' &= a\cos\omega t \\ y' &= b\sin\omega t \end{aligned} \quad . \tag{18}$$

Wir setzen voraus, dass die neue Frequenz ω sich nur wenig von ω_0 unterscheidet und dass die Rotationsgeschwindigkeit Ω klein ist gegenüber der Schwingungsdauer ω_0:

$$\begin{aligned} &\omega - \omega_0 \ll \omega_0 \\ &\Omega \ll \omega_0 \end{aligned} \quad . \tag{19}$$

Unser Ansatz für die Lösung von Gl. (13) ist damit

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t\cos\Omega t \;-\; b\sin\omega t\sin\Omega t \\ y &= a\cos\omega t\sin\Omega t \;+\; b\sin\omega t\cos\Omega t \end{aligned} \quad . \tag{20}$$

Wir setzen die Terme für x und y jetzt schrittweise ein:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2\cos^2\omega t\cos^2\Omega t \;-\; 2ab\cos\omega t\cos\Omega t\sin\omega t\sin\Omega t \;+\; b^2\sin^2\omega t\sin^2\Omega t \\ y^2 &= a^2\cos^2\omega t\sin^2\Omega t \;-\; 2ab\cos\omega t\sin\Omega t\sin\omega t\cos\Omega t \;+\; b^2\sin^2\omega t\cos^2\Omega t \end{aligned} \quad ,$$

damit wird

$$x^2 \;+\; y^2 \;=\; a^2\cos^2\omega t \;+\; b^2\sin^2\omega t \;.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\dot{x} \;&=\; -a\omega\sin\omega t\cos\Omega t \;-\; a\Omega\cos\omega t\sin\Omega t \;-\; b\omega\cos\omega t\sin\Omega t \;-\; b\Omega\sin\omega t\cos\Omega t\\ &=\; -(a\omega + b\Omega)\sin\omega t\cos\Omega t \;-\; (a\Omega \;+ b\omega)\cos\omega t\sin\Omega t\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}\dot{y} \;&=\; -a\omega\sin\omega t\sin\Omega t \;+\; a\Omega\cos\omega t\cos\Omega t \;+\; b\omega\cos\omega t\cos\Omega t \;-\; b\Omega\sin\omega t\sin\Omega t\\ &=\; -(a\omega + b\Omega)\sin\omega t\sin\Omega t \;+\; (a\Omega \;+ b\omega)\cos\omega t\cos\Omega t\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 \;+\; \dot{y}^2 \;=\;\; & (a\omega + b\Omega)^2\sin^2\omega t\cos^2\Omega t \;+\; 2(a\omega + b\Omega)\,(a\Omega \;+ b\omega)\sin\omega t\cos\Omega t\cos\omega t\sin\Omega t\\ & -\; (a\Omega \;+ b\omega)^2\cos^2\omega t\sin^2\Omega t\\ & +\; (a\omega + b\Omega)^2\sin^2\omega t\sin^2\Omega t \;-\; 2(a\omega + b\Omega)\,(a\Omega \;+ b\omega)\sin\omega t\cos\Omega t\cos\omega t\sin\Omega t\\ & +\; (a\Omega \;+ b\omega)^2\cos^2\omega t\cos^2\Omega t\\ =\;\; & (a\omega + b\Omega)^2\sin^2\omega t + \;(a\Omega \;+ b\omega)^2\cos^2\omega t\end{aligned}$$

Für $\Omega \ll \omega$ folgt

$$\dot{x}^2 \;+\; \dot{y}^2 \;=\; \omega^2(a^2\sin^2\omega t \;+\; b^2\cos^2\omega t)\,.$$

Der Term $x(x^2 \;+\; y^2)$ erfordert ebenfalls eine längere Rechnung:

$$\begin{aligned}x(x^2 + y^2) \;&=\; (a\cos\omega t\cos\Omega t \;-\; b\sin\omega t\sin\Omega t)(a^2\cos^2\omega t \;+\; b^2\sin^2\omega t)\\ &=\; a^3\cos^3\omega t\cos\Omega t + ab^2\cos\omega t\cos\Omega t\sin^2\omega t - a^2 b\sin\omega t\sin\Omega t\cos^2\omega t - b^3\sin^3\omega t\sin\Omega t\\ &=\; \frac{1}{4}\left[a^3(3\cos\omega t + \cos 3\omega t)\cos\Omega t + ab^2(\cos\omega t - \cos 3\omega t)\cos\Omega t\right]\\ &\quad+\; \frac{1}{4}\left[-\,a^2 b(\sin\omega t + \sin 3\omega t)\sin\Omega t - b^3(3\sin\omega t - \sin 3\omega t)\sin\Omega t\right]\end{aligned}$$

.

Vernachlässigt man die dritten Harmonischen in ω (Terme mit 3ω), ergibt sich

$$\begin{aligned}x(x^2 \;+\; y^2) \;&=\; \frac{1}{4}\left[3a^3\cos\omega t\cos\Omega t \;+\; ab^2\cos\omega t\cos\Omega t \;-\; a^2 b\sin\omega t\sin\Omega t \;-\; 3b^3\sin\omega t\sin\Omega t\right]\\ &=\; \frac{1}{4}\left[(3a^3 \;+\; ab^2)\cos\omega t\cos\Omega t \;-\; (3b^3 \;+\; a^2 b)\sin\omega t\sin\Omega t\right]\end{aligned}$$

Auch in $x(\dot{x}^2 \;+\; \dot{y}^2)$ vernachlässigen wir die Terme der dritten Harmonischen:

$$\begin{aligned}x(\dot{x}^2 \;+\; \dot{y}^2) \;&=\; \omega^2(a\cos\omega t\cos\Omega t \;-\; b\sin\omega t\sin\Omega t)(a^2\sin^2\omega t \;+\; b^2\cos^2\omega t)\\ &=\; \omega^2(a^3\cos\omega t\sin^2\omega t\cos\Omega t \;+\; ab^2\cos^3\omega t\cos\Omega t\\ &\qquad -\; a^2 b\sin^3\omega t\sin\Omega t \;-\; b^3\sin\omega t\cos^2\omega t\sin\Omega t)\end{aligned}$$

$$x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{\omega^2}{4}\left[a^3(\cos\omega t - \cos 3\omega t)\cos\Omega t + ab^2(3\cos\omega t + \cos 3\omega t)\cos\Omega t\right]$$
$$- \frac{\omega^2}{4}\left[a^2 b(3\sin\omega t - \sin 3\omega t)\sin\Omega t + b^3(\sin\omega t + \sin 3\omega t)\sin\Omega t\right]$$
$$= \frac{\omega^2}{4}\left[(a^3 + 3ab^2)\cos\omega t\cos\Omega t - (b^3 + 3a^2 b)\sin\omega t\sin\Omega t\right]$$

Die beiden letzten Terme auf der linken Seite von G. (13a) lauten damit

$$\frac{1}{2}\omega_0^2\frac{x}{l^2}(x^2 + y^2) + \frac{x}{l^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$
$$= \frac{\omega_0^2}{8l^2}\left[(3a^3 + ab^2)\cos\omega t\cos\Omega t - (3b^3 + a^2 b)\sin\omega t\sin\Omega t\right]$$
$$- \frac{\omega^2}{4l^2}\left[(a^3 + 3ab^2)\cos\omega t\cos\Omega t - (b^3 + 3a^2 b)\sin\omega t\sin\Omega t\right] \tag{23}$$
$$= \frac{1}{8l^2}\left[-2\omega^2(a^3 + 3ab^2) + \omega_0^2(3a^3 + ab^2)\right]\cos\omega t\cos\Omega t$$
$$+ \frac{1}{8l^2}\left[2\omega^2(b^3 + 3a^2 b) - \omega_0^2(3b^3 + a^2 b)\right]\sin\omega t\sin\Omega t$$

Andererseits ist

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left[-(a\omega + b\Omega)\sin\omega t\cos\Omega t - (a\Omega + b\omega)\cos\omega t\sin\Omega t\right]$$
$$= -\omega(a\omega + b\Omega)\cos\omega t\cos\Omega t + \Omega(a\omega + b\Omega)\sin\omega t\sin\Omega t$$
$$+ \omega(a\Omega + b\omega)\sin\omega t\sin\Omega t - \Omega(a\Omega + b\omega)\cos\omega t\cos\Omega t$$
$$= -\left[a(\omega^2 + \Omega^2) + 2b\omega\Omega\right]\cos\omega t\cos\Omega t + \left[2a\omega\Omega + b(\omega^2 + \Omega^2)\right]\sin\omega t\sin\Omega t$$

und damit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\left[a(\omega^2 - \omega_0^2 + \Omega^2) + 2b\omega\Omega\right]\cos\omega t\cos\Omega t + \left[2a\omega\Omega + b(\omega^2 - \omega_0^2 + \Omega^2)\right]\sin\omega t\sin\Omega t$$

Wir ersetzen jetzt Gl. (13a) durch die Terme dieser Gleichung und die der Gl. (23) und erhalten

$$\left[-a(\omega^2 - \omega_0^2 + \Omega^2) - 2b\omega\Omega - \frac{1}{8l^2}\left\{-2\omega^2(a^3 + 3ab^2) + \omega_0^2(3a^3 + ab^2)\right\}\right]\cos\omega t\cos\Omega t$$
$$+ \left[2a\omega\Omega + b(\omega^2 - \omega_0^2 + \Omega^2) - \frac{1}{8l^2}\left\{2\omega^2(b^3 + 3a^2 b) - \omega_0^2(3b^3 + a^2 b)\right\}\right]\sin\omega t\sin\Omega t = 0$$

Die geschweiften Klammern enthalten den Beitrag der kubischen Terme in Gl. (13), die klein sind gegenüber $\ddot{x} + \omega_0^2 x$. Hier machen wir Gebrauch von unserer Näherung $\omega - \omega_0 << \omega_0$ und ersetzen ω durch ω_0. Außerdem vernachlässigen wir in den runden Klammern Ω^2 gegenüber $\omega^2 - \omega_0^2$. Dann folgt

$$\left[-a(\omega^2-\omega_0^2)-2b\omega_0\Omega-\frac{1}{8l^2}\left\{-2\omega_0^2(a^3+3ab^2)+\omega_0^2(3a^3+ab^2)\right\}\right]\cos\omega t\cos\Omega t$$
$$+\left[\ b(\omega^2-\omega_0^2)+2a\omega_0\Omega-\frac{1}{8l^2}\left\{\ 2\omega_0^2(b^3+3a^2b)-\omega_0^2(3b^3+a^2b)\right\}\right]\sin\omega t\sin\Omega t = 0$$

oder

$$\left[-a(\omega^2-\omega_0^2)-2b\omega_0\Omega-\frac{\omega_0^2 a}{8l^2}(a^2-5b^2)\right]\cos\omega t\cos\Omega t$$
$$+\left[\ b(\omega^2-\omega_0^2)+2a\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2 b}{8l^2}(b^2-5a^2)\right]\sin\omega t\sin\Omega t = 0 .$$

Damit diese Gleichung für alle Zeiten t gilt, müssen die beiden eckigen Klammern verschwinden. Das heißt, es muss gelten

$$a(\omega^2-\omega_0^2)+2b\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2 a}{8l^2}(a^2-5b^2) = 0$$
$$\wedge \qquad b(\omega^2-\omega_0^2)+2a\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2 b}{8l^2}(b^2-5a^2) = 0 .$$

Addiert und subtrahiert man beide Gleichungen, folgt

$$(a+b)(\omega^2-\omega_0^2)+2(a+b)\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2}{8l^2}(a^3-5a^2b+b^3-5ab^2) = 0$$
$$(a-b)(\omega^2-\omega_0^2)-2(a-b)\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2}{8l^2}(a^3-5ab^2-b^3+5a^2b) = 0$$

Division durch $(a+b)$ bzw. $(a-b)$ ergibt

$$\omega^2-\omega_0^2+2\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2}{8l^2}(a^2-6ab+b^2) = 0$$
$$\omega^2-\omega_0^2-2\omega_0\Omega+\frac{\omega_0^2}{8l^2}(a^2+6ab+b^2) = 0 .$$

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander, folgt

$$4\omega_0\Omega-\frac{\omega_0^2}{8l^2}\cdot 12ab = 0$$

oder

$$(25)\qquad \Omega = \frac{3}{8}\omega_0\frac{ab}{l^2} .$$

Setzt man dieses Ergebnis in eine der beiden obigen Gleichungen ein, folgt für ω^2 der Näherungswert

$$(26) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{8l^2}\right) .$$

Damit sind die beiden wichtigsten Gleichungen in der Arbeit von *Olsson* (hoffentlich) lückenlos und richtig hergeleitet. Die beiden letzten Kapitel sind rechnerisch weniger anspruchsvoll.

Anmerkungen, Literatur

[1] *M. G. Olsson*, Am. J. Phys, **49**, 531 – 534 (Juni 1981)

[2] Kugelkoordinaten in „physikalischer" Notation (radial, polar, azimutal) = (r, θ, ϕ), wie z. B. in *J. D. Jackson*, Classical Electrodynamics, S. 54. In der Mathematik wird in der Regel (r, ϕ, θ) benutzt – das heißt, die Bezeichnungen für Polar- und Azimutalwinkel sind dort vertauscht.

[3] Bei *Olsson*[1] steht statt ρ ein geschwungenes r