1. Einleitung

Zur Lehrerausbildung gehört die Praxis: Als angehender Physiklehrer musste ich, wie üblich, Experimente vorführen. An eines dieser Demonstrationsexperimente erinnere ich mich noch sehr gut. Gezeigt werden sollte die Wirkung der Gravitationskraft, also der Kraft, mit der sich zwei Massen gegenseitig anziehen. Dazu benutzt man die von *Coulomb* erfundene und später von *Cavendish* benutzte Torsionswaage – ein Gerät, das wegen seiner großen Schwingungsdauer nicht ganz einfach zu handhaben ist. Ich hatte die Drehwaage am Vortag zwei Stunden lang auspendeln lassen, damit sie in der Unterrichtsstunde am Tag darauf eine definierte Ruhelage hatte. Dann geschah die Katastrophe: Vor Beginn der Unterrichtsstunde wollte mein Ausbildungslehrer „nur mal kurz nachprüfen, ob die Waage reagiert", und schwenkte die Kugeln um. Damit war das Experiment schon vor Beginn des Unterrichts zu einem jähen Ende gekommen, die Stunde „gelaufen". Denn die nachfolgenden 45 Minuten reichten zwar zum erneuten Auspendeln, aber für die Demonstration wäre keine Zeit mehr geblieben.

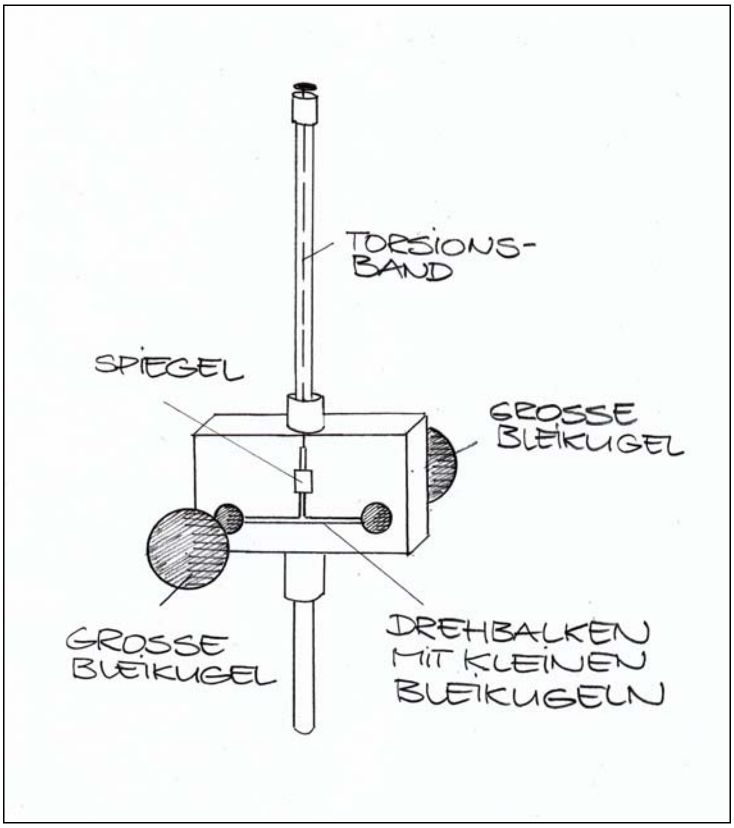

Abb. 1 Torsionswaage mit Bleikugeln

Nach diesem Erlebnis hatte ich den Eindruck, dass der praktische Umgang mit der Gravitationsdrehwaage in der Schulphysik nicht gerade gepflegt wird. Ich fand auch unter meinen Spielkameraden nur einen einzigen Kollegen, der mir versicherte, er habe mit diesem Gerät die Gravitationskonstante bereits gemessen. Die Bedienungsanleitung[1] nannte zwar Werte, enthielt aber keine Abschätzung der Genauigkeit, mit der diese gemessen wurden. Mir ließ die Sache keine Ruhe, ich startete eigene Messungen. Das Ziel war nicht nur der Wert an sich, ich wollte auch wissen, wie genau man diesen bestimmen kann[2].

2. Prinzip der Messung

Die zur Messung benutzte Drehwaage besteht aus einem Balken, in dessen Mitte ein Bolzen rechtwinklig nach oben abzweigt – also einem Gebilde von der Form eines umgekehrten T's. Dieses umgekehrte T hängt an einem etwa 25 cm langen Torsionsband. An den Enden des Drehbalkens befinden sich zwei kleine Bleikugeln. Das ganze System ist in einem Metallgehäuse untergebracht, um es gegen Luftzug abzuschirmen. Aus dem Gehäuse ragt nach oben ein Rohr heraus, in dessen Innern sich das Torsionsband befindet. Den Kugeln des Drehpendels werden nun von verschiedenen Seiten zwei größere Bleikugeln genähert – in der Regel schwenkt man diese Kugeln von der einen auf die andere Seite des Gehäuses (Abb. 1). Durch die Gravitationskraft zwischen den Kugeln des Drehpendels und den großen, ortsfesten Kugeln bewegen sich die Kugeln des Drehpendels auf die großen zu. Dabei dreht sich der Balken um seine Mittelachse und verdrillt das Torsionsband. An dem senkrechten Teil des Drehbalken-T's ist ein kleiner Spiegel befestigt, der sich mit dem Balken verdreht. Auf den Spiegel wird ein Lichtstrahl gerichtet. Der vom Spiegel reflektierte Strahl trifft eine weit entfernte Skala, an der dessen Auftreffpunkt ablesbar ist. Aus der Weg-Zeit-Kurve dieses Lichtzeigers lässt sich die Gravitationskonstante ermitteln.

Im Prinzip geht es bei diesem Versuch darum, die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern zu messen. Aus dieser Kraft, den Massen der beiden Körper und deren Abstand lässt sich dann die Gravitationskonstante berechnen. Nach *Newton* ziehen sich zwei Massen m und M gegenseitig mit einer Kraft F an, für die gilt

(1) $$F = \gamma \frac{mM}{r^2} .$$

Dabei ist r der Abstand zwischen den Schwerpunkten der beiden Massen und γ die Gravitationskonstante. Im vorliegenden Experiment bezeichnen wir die Masse der kleineren Kugeln mit m, die der größeren Kugeln mit M.

Die durch Gl. (1) beschriebene Kraft ist in unserem Fall sehr klein. Die Bleikugeln haben Massen von ca. 0,015 bzw. 1,5 kg und stehen sich im Abstand von 4,5 cm gegenüber. Ihre gegenseitige Anziehungskraft ist damit kleiner als 10^{-9} N (*nano*-Newton). Diese Kraft lässt sich mit der Drehwaage auf zwei Arten bestimmen:

- Einmal, indem man die Beschleunigung misst, mit der sich die kleinen Kugeln an den Enden des Drehbalkens auf die großen zu bewegen, und zwar unmittelbar nachdem man die großen Kugeln herumgeschwenkt hat (*Beschleunigungsmethode*).
- Zum anderen, indem man den Winkel misst, auf den sich der Drehbalken der Torsionsdrehwaage lange Zeit nach dem Umschwenken der großen Kugeln eingependelt hat (*Endausschlagmethode*).

Zum Verständnis der beiden Messmethoden betrachten wir die Bewegungsgleichung des Torsionspendels. Seine Winkelauslenkung φ genügt bekanntlich der Differenzialgleichung

(2) $$J\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + D\varphi = 2Fd .$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment, k die Dämpfungskonstante und D die Winkelrichtgröße des Pendels. Auf der rechten Seite steht das Drehmoment, das auf das Pendel wirkt – in unserem Fall das Produkt aus der zweifachen Gravitationskraft F und dem Abstand d der kleinen Kugeln von der Drehachse des Pendels. Zweifach deswegen, weil die Gravitationskraft zwischen *zwei* Kugelpaaren gemessen wird. Aus Gl. (2) folgt, wenn man durch J dividiert,

(3) $$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{2Fd}{J} .$$

Dabei wurde gesetzt $\delta = k/2J$ und $\omega_0^2 = D/J$. Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist – für den einfachsten Fall, dass das Pendel zur Zeit $t = 0$ mit der Auslenkung φ_0 aus der Ruhe losgelassen wird,

(4) $$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t) + \varphi_\infty .$$

Dabei ist φ_∞ der Winkel, der sich für $t \to \infty$ einstellt. Die Lösung ist eine abklingende harmonische Schwingung.

In einem Vorversuch prüfte ich, ob sich das Pendel auch gemäß dieser Gleichung bewegt. Dazu wurde, wie üblich, die Winkelauslenkung φ mit Hilfe eines Lichtzeigers auf eine (weit entfernte) Skala übertragen und das Wandern des Zeigers auf dieser Skala beobachtet. Abbildung 2 zeigt das Ergebnis meiner Messung. Man erkennt, dass das Pendel frei ausschwingt, also nicht an den Wänden des Gehäuses anstößt – das sollte ohnehin vor jeder Messung nachgeprüft werden. Seine Amplitude ist nach etwa sechs Perioden, das heißt nach 45 bis 60 Minuten, praktisch auf Null

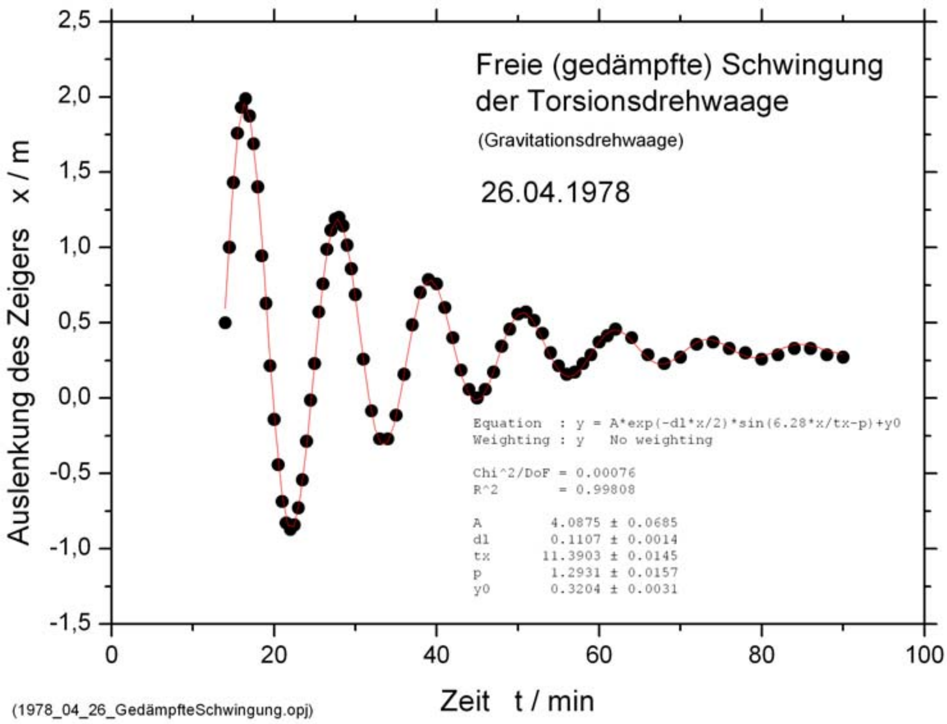

Abb. 2 Schwingung der Gravitationsdrehwaage

zurückgegangen. Aus einer Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate folgt für die Schwingungsdauer $T = 683{,}4 \pm 1{,}0$ s. Diese Zahl stimmt mit den Angaben in der Bedienungsanleitung[1] nicht überein. Dort wird der Wert $T = 525$ s genannt. Der Unterschied ist nicht erklärbar. Zur Abklingrate heißt es in der Gerätekarte[1], dass man etwa eine Stunde warten müsse, bis eine erneute Messung möglich wäre – in Übereinstimmung mit dem von mir festgestellten Befund. Für die Abklingkonstante erhalte ich $\delta = 0{,}0037 \pm 0{,}0001\ \mathrm{s}^{-1}$. Die Gerätekarte nennt ein logarithmisches Dekrement der Größenordnung 0,7, was einem Wert $\delta = 0{,}0013\ \mathrm{s}^{-1}$ entspräche. Auch hier gibt es keine Erklärung für den Unterschied zum von mir gemessenen Wert.

3. Messmethode

3.1 Beschleunigungsmethode

Die beiden oben angegebenen Messmethoden machen Gebrauch davon, dass sich der Schwingungszustand des Drehpendels nach dem Umlegen der großen Kugeln für zwei Zeitabschnitte sehr einfach beschreiben lässt. Das sind einmal sehr kleine, zum anderen sehr große Zeiten ($t \to 0$ bzw. $t \to \infty$). Die Beschleunigungsmethode benutzt die Tatsache, dass sich das Pendel für sehr kleine Zeiten ($t \to 0$) näherungsweise gleichmäßig beschleunigt bewegt. Das geht aus Gl. (2) in folgender Weise hervor: Wir starten (vor Beginn des eigentlichen Versuchs) damit, dass wir die großen Kugeln von hinten „überkreuz“ so nahe an das Drehpendel heran bringen, dass sie die Gehäusewand berühren. Danach warten wir 45 bis 60 Minuten, bis das Pendel zur Ruhe gekommen ist. Ruhe bedeutet, dass die ersten beiden Terme (die zeitlichen Ableitungen) in Gl. (2) Null sind. Wir geben dem Drehmoment, das die Gravitationskraft in dieser Position der Kugeln

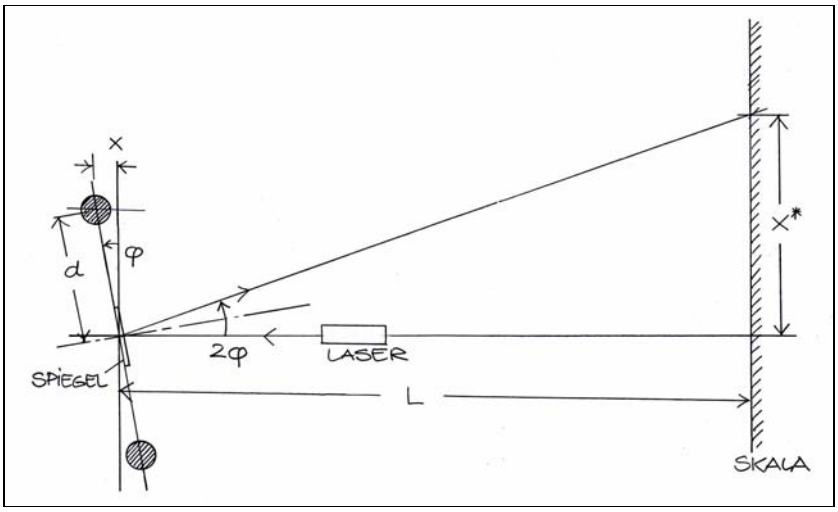

Abb. 3 Geometrie der Lichtzeigeranordnung

ausübt, ein negatives Vorzeichen und bezeichnen den Winkel, um den das Pendel ausgelenkt ist, mit φ_0. Dann schrumpft Gl. (2) zu $D\varphi_0 = -2Fd$ und wir erhalten als Anfangsaus-lenkung $\varphi_0 = -2Fd/D$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ legen wir die großen Kugeln um. Sie berühren jetzt die Gehäusewand von der jeweils anderen Seite. Das Drehmoment der Gravitationskraft hat damit sein Vorzeichen geändert und das Pendel beginnt sich zu bewegen. Da es sich anfangs kaum von der Stelle bewegt und auch nur sehr langsam dreht, machen wir für die ersten Sekunden in Gl. (2) folgende Näherungen: (1) vernachlässigen wir den zur Winkelgeschwindigkeit proportionalen Reibungsterm, (2) setzen wir für die Auslenkung φ den Anfangswert $\varphi_0 = -2Fd/D$ ein. Gleichung (2) wird damit für kleine Werte von t zu

(5) $\quad J\ddot{\varphi} = 4Fd\,.$

Zum Trägheitsmoment J des Drehpendels tragen praktisch nur die beiden (kleinen) Kugeln am Ende des Drehbalkens bei. Den Beitrag des Drehbalkens vernachlässigen wir. Damit wird J gleich der Masse $2m$ der beiden (kleinen) Kugeln, multipliziert mit dem Quadrat ihres Abstandes d von der Drehachse, also $J = 2md^2$. Die Winkelauslenkung φ ersetzen wir durch den Quotienten x/d. Das heißt, wir benutzen die Kleinwinkelnäherung[3]

(6) $\quad x = \varphi d\,.$

Damit vereinfacht sich Gl. (5) zu

(7) $\quad m\ddot{x} = 2F\,,$

also zu einer Gleichung der Form „Kraft = Masse mal Beschleunigung“. Aus ihr erhalten wir durch Integration das bekannte Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Wir bezeichnen die Beschleunigung im Folgenden, wie üblich, mit a. Dann ist der Weg x, den die kleinen Kugeln nach dem Umlegen der großen Kugeln zurücklegen, gegeben durch

(8) $\quad x = \dfrac{a}{2}t^2$

mit $a = 2F/m$. Aus der Geometrie der Messanordnung (Abb. 3) folgt, dass der Weg x^*, den der Lichtzeiger auf der Skala zurücklegt, mit dem Weg x verknüpft ist durch

(9) $\quad x^* = 2\dfrac{L}{d}x\,,$

wobei L die Entfernung der Skala von der Drehwaage ist. Mit Gl. (8) folgt dann

(10) $\quad x^* = \dfrac{aL}{d}t^2\,.$

Diese Größe wird in Abhängigkeit von t gemessen. Zur Auswertung trägt man x^* als Funktion von t^2 in ein Koordinatensystem ein, legt eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte und liest aus dem Graphen deren Steigung ab. Sie werde K_1 genannt:

(11) $\quad K_1 = \dfrac{aL}{d}\,.$

Zusammen mit den Zahlenwerten von L und d folgt dann a. Die Beschleunigung a ist, wie oben erwähnt, gleich dem *Zweifachen* der Kraft F, dividiert durch die Masse m der kleineren Kugel. Sie ist noch mit einem Korrekturfaktor k zu multiplizieren, so dass gilt

(12) $$a = \gamma \frac{2M}{r^2} \cdot k\ .$$

Der Korrekturfaktor k berücksichtigt, dass die kleinere Kugel der Torsionswaage nicht nur von der einen (großen) Kugel angezogen wird, die in ihre Nähe geschwenkt wurde, sondern auch von der zweiten, weiter entfernten (großen) Kugel. Die in der Drehwaage gemessene Gravitationskraft ist daher gegenüber dem Term in Gl. (1) um diesen Faktor kleiner. Eine einfache Rechnung (Anhang) ergibt k = 0,9309. Aus den Gleichungen (11) und (12) erhalten wir schließlich

(13) $$\gamma = \frac{r^2 d\, K_1}{2ML\, k}\ .$$

Die Gleichung zeigt, dass der Abstand r der Mittelpunkte der sich anziehenden Kugeln quadratisch in den Messwert eingeht. Der (relative) Fehler von r hat daher in der Fehlersumme doppeltes Gewicht – lässt sich aber (leider) nicht kleiner als etwa 4 % machen.

3.2 Endausschlagmethode

Bei der Endausschlagsmethode wird, wie oben gesagt, der Winkel gemessen, um den sich die Torsionswaage nach dem Umlegen der großen Kugeln gedreht hat. Dazu muss die Position des Drehpendels *vor* dem Umlegen bekannt sein. Wir starten also wiederum damit, dass die großen Kugeln den (kleinen) Kugeln des Drehpendels von hinten „überkreuz“ genähert worden sind und dass das Pendel zur Ruhe gekommen ist. Damit beträgt die Winkelauslenkung des Pendels, wie bei der Beschleunigungsmethode, $\varphi_0 = -2Fd/D$. Wir schwenken auch nun die großen Kugeln um, warten aber dieses Mal, bis die Pendelschwingung erneut zur Ruhe kommt. Das ist, wie schon erwähnt, nach 45 bis 60 Minuten der Fall. Damit haben wir den Fall $t \to \infty$ realisiert, der oben genannt wurde. Die Winkelauslenkung des Pendels beträgt jetzt aus Symmetriegründen $+2Fd/D$. Da der Nullpunkt unserer Winkelskala nicht bekannt ist, messen wir die *Differenz* der beiden Winkel. Diese beträgt, unabhängig von der Position des Nullpunkts,

(14) $$\Delta\varphi = 2\varphi_0 = \frac{4Fd}{D}\ .$$

Um aus $\Delta\varphi$ einen Wert für F und damit für γ zu erhalten, muss die Winkelrichtgröße D des Torsionsbands bekannt sein. Ihre Messung lässt sich mit Hilfe der Beziehung $\omega_0^2 = D/J$ auf die Messung der Schwingungsdauer T zurückführen. Setzt man $J = 2md^2$ ein und löst nach D auf, erhält man

(15) $$D = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2}\ .$$

Mit diesem Term für D und dem Ausdruck für F nach Gl. (1) folgt aus Gl. (14)

(16) $$\Delta\varphi = \frac{\gamma MT^2 k}{2\pi^2 r^2 d}\ .$$

Auch hier ist im Term für F der schon erwähnte Korrekturfaktor k anzubringen. Der Lichtzeiger übersetzt die Winkeldifferenz $\Delta\varphi$ in die Wegdifferenz $\Delta x^* = 2L\cdot\Delta\varphi$, also folgt

(17) $$\Delta x^* = \frac{\gamma MLT^2 k}{\pi^2 r^2 d}$$

Daraus ergibt sich für γ der Term

(18) $$\gamma = \frac{\pi^2 r^2 d}{MLT^2 k} \cdot \Delta x^*\ .$$

Diese Gleichung zeigt, dass auch hier, wie bei der Beschleunigungsmethode, der Abstand r der Kugelmittelpunkte quadratisch in das Messergebnis eingeht – und damit die Genauigkeit der

Messung begrenzt. Das Quadrat der Schwingungsdauer T beeinflusst die Genauigkeit der Messung weniger, da T sehr genau bestimmt werden kann (siehe den Vorversuch).

4. Messergebnis

4.1 Beschleunigungsmethode

Tabelle 1 listet die Ergebnisse der Beschleunigungsmessung auf. Die Größe x^* ist der Weg nach Gl. (9) und (10), den der Lichtzeiger als Funktion der Zeit t zurücklegt. Nullpunkt war seine Position

Tabelle 1 (Beschleunigungsmethode, Messung vom 23.04.1980)

t in Sekunden	x^* in Metern
0	0
15	0
30	0,015
45	0,030
60	0,075
75	0,090
90	0,120

zum Zeitpunkt $t = 0$. Zur Auswertung wurde x^* als Funktion von t^2 in ein Koordinatensystem eingetragen und eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte gelegt. Das Ergebnis zeigt Abb. 4. Die Anpassung der Geraden nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab als Steigung K_1 den

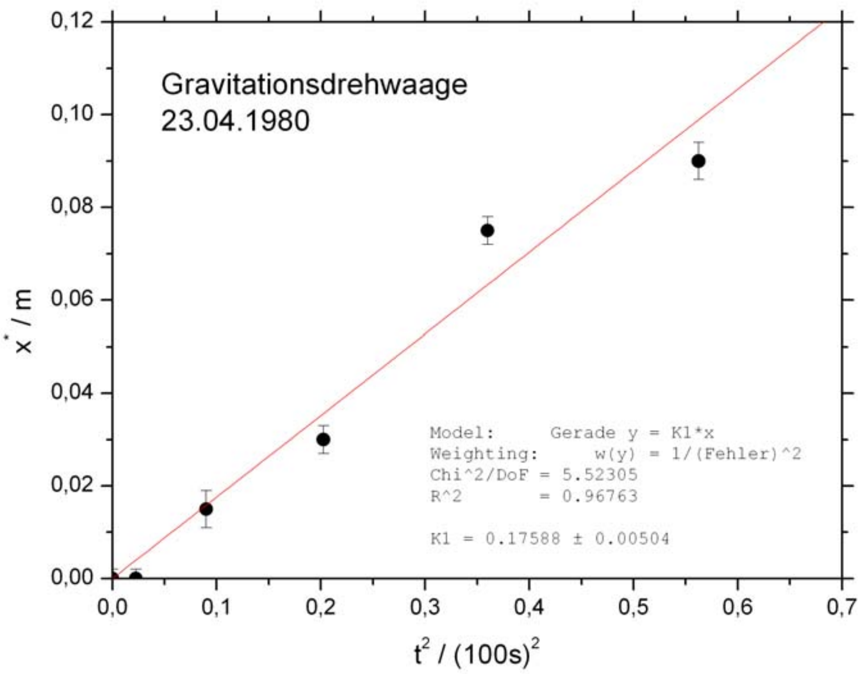

Abb. 4 Beschleunigungsmethode. Messwert ist die Steigung K_1 der Geraden. Die Anpassung ergibt $K_1 = (1,76 \pm 0,16)\cdot 10^{-5}$ m/s². Daraus folgt für die Beschleunigung $a = (8,19 \pm 0,74)\cdot 10^{-8}$ m/s²

Wert $K_1 = (1,76 \pm 0,16) \cdot 10^{-5}$ m/s². Mit den Werten für L, d, M und r (Tabelle 2) folgt daraus nach Gl. (12) und Gl. (13) eine Beschleunigung $a = (8,19 \pm 0,74) \cdot 10^{-8}$ m/s².

4.2 Endausschlagmethode

Abbildung 5 zeigt das Ergebnis der Messung nach dem Endausschlagverfahren. Aufgetragen ist die Position x^* des Lichtzeigers auf der Skala als Funktion der Zeit t. Die (großen) Kugeln wurden zwei Mal umgeschwenkt, und zwar zu den Zeitpunkten t = 40 min und t = 90 min. Zu messen sind die

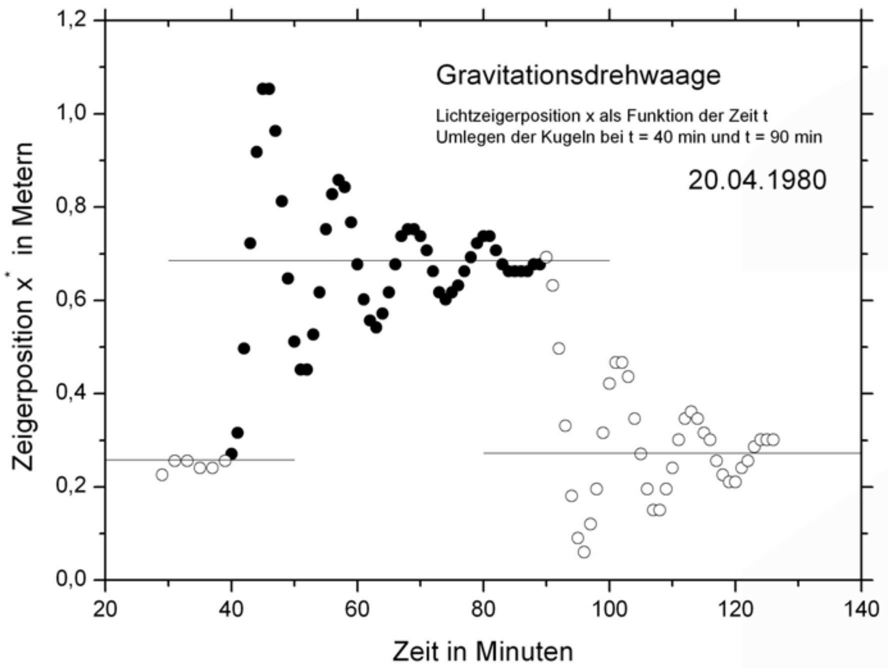

Abb. 5 Endausschlagmethode. Gemessen wird der Unterschied Δx^* der durch die horizontalen Linien angedeuteten Zeigerpositionen. Sie entsprechen den Positionen im jeweils eingependelten Zustand. Gemessen wird $\Delta x^* = (0{,}420 \pm 0{,}024)$ m.

Positionen des eingependelten Lichtzeigers für die Zeitintervalle $t < 40$ min, 40 min $< t <$ 90 min und $t > 90$ min. Die Differenz dieser Positionen ist die Größe Δx^*. Man erhält zwei Werte, da zwei Mal umgeschwenkt wurde: $\Delta x^* = 0{,}4274$ m und $\Delta x^* = 0{,}4126$ m. Der Mittelwert ist $\Delta x^* = 0{,}4200$ m. Der Fehler dieser Größe ist gegeben durch die Unsicherheit, mit der man sie aus Abb. 5 ablesen

Tabelle 2 Größen, die in die Messung der Gravitationskonstante eingehen

Größe		Messwert
Masse der großen Kugel	M	1,46 ± 0,01 kg
Schwingungsdauer der Drehwaage	T	683,4 ± 1,0 s
Entfernung Drehwaage – Skala	L	10,74 ± 0,02 m
Abstand der kleinen von den großen Kugeln	r	47 ± 1 mm
Abstand der kleinen Kugel von der Drehachse	d	0,05 m
Korrekturfaktor	k	0,9309

kann. Ein Schätzwert ist ± 0,0164 m. Dazu ist der statistische Fehler zu addieren. Der ist von der Größenordnung der Abweichung der beiden Einzelwerte von Mittelwert, also ± 0,0074 m. Addiert man beide Fehler, erhält man $\Delta x^* = (0{,}420 \pm 0{,}024)$ m.

5. Auswertung und Fehlerabschätzung

5.1 Beschleuningungsmethode

In das Ergebnis der Beschleunigungsmethode gehen außer der Steigung K_1 der Geraden in Abb. 4 die Größen *r*, *M*, *L* und *d* ein. Deren Werte habe ich, zusammen mit den von mir abgeschätzten Fehlern, in Tabelle 2 zusammengefasst. Die Beschleunigung $a = (8{,}19 \pm 0{,}74) \cdot 10^{-8}$ m/s^2, die nach Gl. (11) daraus folgt, wurde schon genannt. Für die Gravitationskonstante ergibt sich damit nach Gl. (13) der Wert $\gamma = (6{,}65 \pm 0{,}65) \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Der angegebene Fehler beträgt etwa 10 %. Ich habe ihn als geometrische Summe[5] der Fehler der Einzelmessungen berechnet, also nach der Formel

$$(19) \qquad \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\Delta K_1}{K_1}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2} \ .$$

Zu den Fehlern der Messungen von *r*, *M*, *L* und *d* ist zu bemerken: Für den Abstand *r* (47 mm) der Kugelmittelpunkte wurde eine Unsicherheit von ± 1 mm angenommen, da die entsprechende Strecke nicht direkt zugänglich ist und durch mehrere Messungen „zusammengesetzt" werden musste. Der Fehler von *M* (1,46 kg) entspricht der Messgenauigkeit der benutzten Waage, die etwa ± 0,1 kg betrug. Für die Strecke *L* (10,74 m) zwischen Drehwaage und Anzeigeskala erschien eine Unsicherheit von ± 2 cm plausibel. Der Wert von *d* (0,05 m) wurde ohne Fehler von der Gerätekarte bzw. Bedienungsanleitung[1] übernommen.

5.2 Endausschlagmethode

Nach Gl. (18) gehen im Fall der Endausschlagmethode neben dem Wert von Δx^* die Größen *r*, *T*, *M*, *L* und *d* ein. Abgesehen von der Schwingungsdauer *T* sind das alle Größen, die auch bei der Beschleunigungsmethode schon berücksichtigt werden mussten. Die Schwingungsdauer *T* (683,4 s) wurde dem Vorversuch entnommen. Deren Unsicherheit ergab sich aus der Anpassung der theoretischen Kurve Gl. (4) an die Messpunkte (Abb. 2) zu ± 1,0 s. Damit folgt für die Gravitationskonstante der Wert $\gamma = (6{,}71 \pm 0{,}48) \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Der relative Fehler von γ wurde wiederum als geometrische Summe[4] der Fehler der Einzelmessungen berechnet – das heißt, nach der Formel

$$(20) \qquad \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(\Delta x^*)}{(\Delta x^*)}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}$$

Er beträgt 7,2% und ist von derselben Größenordnung wie der Fehler der Beschleunigungsmethode.

6. Ergebnis

Zur Gegenüberstellung der Ergebnisse beider Methoden hier nochmals die Messwerte: Sie sind

$$\gamma = (6{,}65 \pm 0{,}65) \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \quad \text{(Beschleunigungsmethode),}$$

und

$$\gamma = (6{,}71 \pm 0{,}48) \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \quad \text{(Endausschlagmethode).}$$

Der Literaturwert der Gravitationskonstanten ist $\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Die recht gute Übereinstimmung zwischen diesem und den hier gemessenen Werten bedeutet nicht, dass es sich um eine „genaue“ Messung handelt. Entscheidend sind die genannten Fehler. Sie sind von der Größenordnung 10 %.

Wie sehr die oben genannten Zahlen von den Größen abhängen, die in das Endergebnis eingehen, zeigt das folgende Beispiel: Würde man für den Abstand der sich anziehenden Kugeln nicht, wie hier, r = 47 mm, sondern den in der Bedienungsanleitung[1] genannten Wert r = 45 mm einsetzen, ergäbe sich ein um etwa 8 % geringerer Wert für γ. Daraus ersieht man auch, dass die angegeben Fehler sich vermutlich nicht weiter reduzieren lassen. Jedenfalls ist eine Genauigkeit von der Größenordnung 10 % für ein Experiment der Schulphysik kein schlechter Wert.

Anmerkungen

1 *Leybold*, Gerätekarte 33210 und Physikalische Handblätter DK 531.51;a und DK 531.51;b (1960)

2 Ein Messwert, der dem Literaturwert möglichst nahe kommt, kann ein Zufallstreffer sein. Entscheidend ist bekanntlich das Intervall, in dem der Messwert bei Wiederholung der Messung mit gegebener Wahrscheinlichkeit (z. B. 68%) anzutreffen ist. Die Grenzen dieses Intervalls schätzt man ab. Eine genaue Messung bedeutet, dass dieses Intervall klein ist.

3 In $x = \varphi\, d$ ist φ im Bogenmaß einzusetzen (Pardon, wenn dieser Hinweis überflüssig ist).

4 Will man mit den Fehlerangaben auf der sicheren Seite sein, sollte man die relativen Fehler algebraisch addieren. Im Fall der Endausschlagmethode wäre dann mit

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta(\Delta x^*)}{(\Delta x^*)} + 2\frac{\Delta r}{r} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta L}{L}$$

zu rechnen. Das ergäbe einen relativen Fehler von 11,1% statt der dort angegebenen 7,2%.

Anhang

Berechnung des Korrekturfaktors *k*

Die Kugel des Drehbalkens wird nicht nur von der ihr unmittelbar gegenüber liegenden großen Kugel angezogen, sondern auch von der zweiten, weiter entfernten großen Kugel (Abb. 6). Die Kraft, die von der unmittelbar gegenüber liegenden Kugel ausgeht, ist $F_0 = \gamma mM / a^2$. Die Kraft, die die zweite, weiter entfernte Kugel ausübt, ist gegeben durch

$$F_0' = \gamma \frac{mM}{a^2 + 4d^2} .$$

Diese hat eine Komponente F_1 entgegengesetzt zur Kraft F_0. Sie lässt sich schreiben als

$$F_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4d^2}} \cdot F_0' = \gamma \frac{amM}{(a^2 + 4d^2)^{3/2}} .$$

Damit folgt

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{a^3}{(a^2 + 4d^2)^{3/2}}$$

und mit den Werten d = 0,05 cm und a = 0,045 cm

$$\frac{F_1}{F_0} = 0{,}069105$$

Das heißt, die Gravitationskraft wird um etwa 7% kleiner gemessen als die Kraft $F_0 = \gamma mM / a^2$, die von der unmittelbar gegenüberliegenden Kugel ausgeht. Als Korrekturfaktor folgt damit

$$k = \frac{F_0 - F_1}{F_0} = 1 - 0{,}069105 = 0{,}9309 .$$

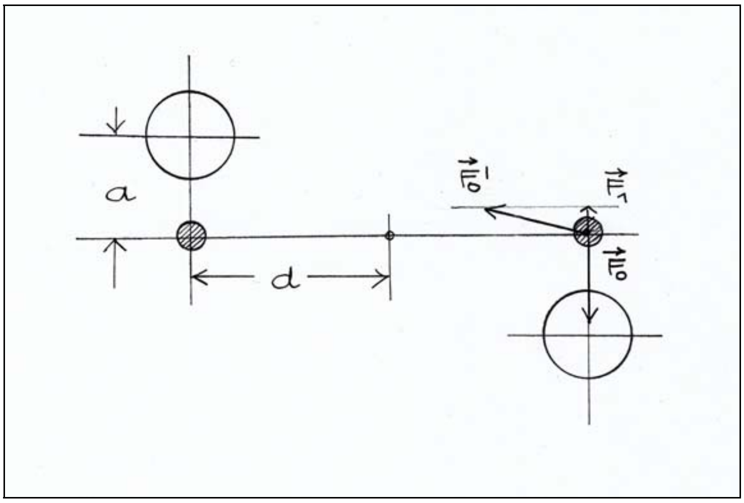

Abb. 6 Berechnung des Korrekturfaktors