1. Messanordnung

Elektronen, die sich senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfelds bewegen, werden in diesem abgelenkt und bewegen sich auf einer Kreisbahn, deren Radius von ihrer Geschwindigkeit und der Magnetfeldstärke abhängt. Das lernt man im Physikunterricht. Kann man diese Ablenkung auch im Magnetfeld der Erde beobachten – und vielleicht sogar die Feldstärke des Erdfeldes messen?

Mit den Mitteln eines Hobby-Physikers vermutlich nicht – es sei denn, man darf die Geräte der Physiksammlung einer Schule benutzen. Dort gibt es in der Regel eine Elektronenablenkröhre, beispielsweise die der Firma Leybold (Geräte-Nr. 555624). In dieser Röhre befindet sich ein Fluoreszenzschirm, auf dem die Elektronenbahn als Leuchtspur sichtbar gemacht wird. Das Magnetfeld, das die Elektronen ablenken soll, erzeugt man normalerweise durch ein Helmholtzspulenpaar, in dessen Mitte man die Röhre platziert.

Will man die Ablenkung im Erdmagnetfeld beobachten, sollte man wegen der geringen Stärke des Erdfeldes die Geometrie der Anordnung so wählen, dass die Ablenkung möglichst groß ist. Das erreicht man beispielsweise mit dem folgenden, etwas ungewöhnlichen Versuchsaufbau: Man neigt Sockel und Glaskolben der Röhre so, dass die Feldlinien des Erdmagnetfeldes senkrecht auf der Ebene des Fluoreszenzschirms stehen. Dann verläuft die Elektronenbahn in der Ebene des Schirms, so dass die Leuchtspur exakt kreisförmig ist. Der Radius des Kreises, auf dem sich die Elektronen bewegen, ist jedoch wegen der geringen Stärke des Erdmagnetfeldes (s. o.) so groß, dass man ihn nicht direkt auf dem Schirm ablesen kann. Er lässt sich aber in guter Näherung aus der Strecke berechnen, um die die Leuchtspur am Ende des Schirms seitlich verschoben ist.

Die Feldlinien des Erdmagnetfeldes sind in Deutschland in etwa von Süden nach Norden gerichtet und durchstoßen eine horizontale Ebene von oben nach unten unter einem Winkel von ca. 65° (*Inklination*). Der Fluoreszenzschirm der Röhre (und mit ihm das gesamte Gerät) wird daher um diesen Winkel gegenüber der Vertikalen in Richtung Norden geneigt. Das führt zu der Versuchsanordnung in Abb. 1.

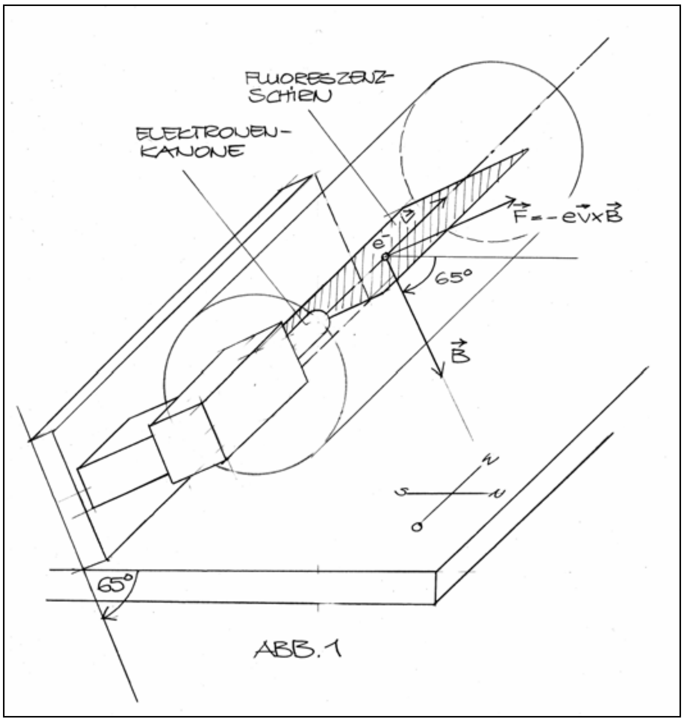

Abb. 1 Versuchsaufbau mit geneigter Elektronenablenkröhre

Abbildung 2 zeigt ein Foto der Messanordnung. Damit sich mögliche Unsymmetrien der Röhrengeometrie kompensieren, ist es sinnvoll, den Strahl einmal in West-Ost-(*WO*-) und das andere Mal in Ost-West-(*OW*-)Richtung zu richten. Dazu muss das ganze Gerät um 180° gedreht werden und mit gleicher Neigung gegenüber der Vertikalen ausgerichtet werden. Die Differenz der Ablenkungen zwischen den Strahlrichtungen *WO* und *OW* sollte weitgehend frei von Symmetriefehlern sein.

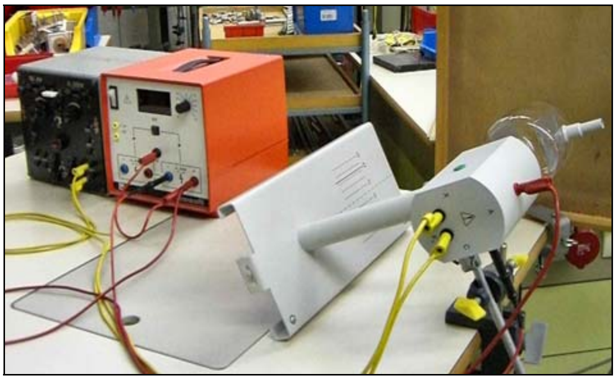

Abb. 2 Foto der Messanordnung

2. Theorie

Die Elektronen der Ablenkröhre werden im elektrischen Feld zwischen Kathode und Anode der Elektronenkanone beschleunigt. Ihre kinetische Energie $mv^2/2$ beim Austritt aus der Kanone (d. h., am Ort der Anode) ist gleich der potentiellen Energie eU am Ort der Kathode. Dabei ist U die Spannung zwischen Kathode und Anode, e die Elektronenladung ($e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As) und m die Elektronenmasse ($m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg). Aus der Gleichheit der beiden Energien folgt für die Geschwindigkeit der Elektronen

(1) $$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \ .$$

Wir setzen voraus, dass die Elektronenbahn ein Kreis ist. Dann ist die Zentripetalkraft mv^2/r gleich der Lorentzkraft evB, die das Erdmagnetfeld auf die Elektronen ausübt. Dabei ist B die Feldstärke[1] des Erdfeldes. Aus $mv^2/r = evB$ folgt für den Radius r der Elektronenbahn

(2) $$r = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{\frac{2U}{(e/m)}}$$

Diese Formel zeigt, dass r von der Magnetfeldstärke B, der Beschleunigungsspannung U und der spezifischen Elektronenladung e/m abhängt ($e/m = 1{,}7588 \cdot 10^{11}$ As/kg).

Das Experiment besteht im Prinzip darin, r für einige Werte von U zu messen und daraus B nach Gl. (2) zu bestimmen. Zur Messung von r ist anzumerken: Eine Überschlagsrechnung ergibt, dass man für $B \approx 40\ \mu$T (das ist in etwa die Stärke des Erdmagnetfeldes in Deutschland) und U von der Größenordnung 1 kV einen Radius r von etwa 2,60 m erwartet. Daher ist auf dem 10×5 cm^2 großen Fluoreszenzschirm der Ablenkröhre nicht der gesamte Kreis sichtbar, den die Elektronen durchlaufen. Sie werden auf ihrem Weg in der Röhre jedoch soweit seitlich abgelenkt, dass aus dieser Ablenkung der Radius r mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden kann. Abbildung 3 zeigt ein Foto des Fluoreszenzschirms mit dem deutlich nach oben abgelenkten Elektronenstrahl.

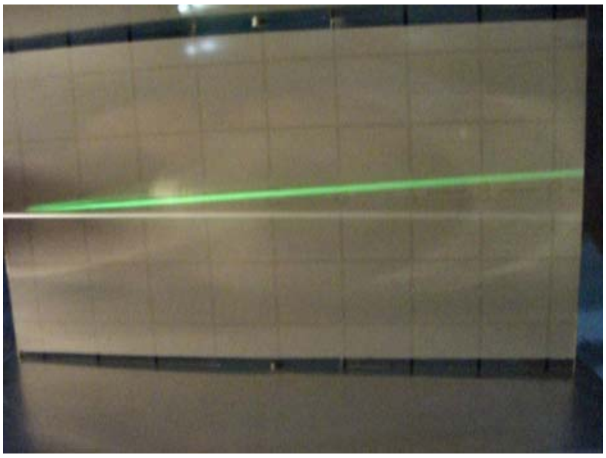

Abb. 3 Leuchtspur des Elektronenstrahls auf dem Fluoreszenzschirm der Ablenkröhre

Die Wegstrecke, auf der die Elektronen nach dem Austritt aus der Elektronenkanone abgelenkt werden, werde L genannt. Dann gilt für die Strecke x, um die sie seitlich abgelenkt werden, näherungsweise

(3) $$x = \pm \frac{L^2}{2r} \quad .$$

Diese Näherung folgt aus der für eine Kreisbahn exakten Gleichung $(r - x)^2 + L^2 = r^2$, wenn man auf der linken Seite x^2 gegenüber dem Term $2rx$ vernachlässigt. Da x von der Größenordnung Millimeter und r von der Größenordnung Meter ist, ist dies für $x << r$ erlaubt.

Das „±“ vor dem Term auf der rechten Seite von Gl. (3) deutet an, dass die Ablenkung je nach Strahlrichtung (*WO* bzw. *OW*) auf dem Fluoreszenzschirm in positiver bzw. negativer x-Richtung erfolgt. Aus Gl. (3) folgt daher für die Differenz Δx der Ablenkungen zwischen beiden Strahlrichtungen $\Delta x = L^2/r$, also

(4) $$r = \frac{L^2}{\Delta x} \; .$$

Wir benutzen diese Gleichung, um aus den Messwerten von Δx den Radius r der Elektronenbahn zu berechnen. Das Quadrat von r ist nach Gl. (2) proportional zur Beschleunigungsspannung U. Der Proportionalitätsfaktor ist $2/(B^2 e/m)$. Wir erhalten somit einen Wert für B (der Stärke des Erdmagnetfeldes), indem wir r^2 als Funktion von U auftragen, eine Ausgleichsgerade vom Typ $y = Kx$ durch die Messpunkte legen, und deren Steigung K bestimmen. Aus

(5) $$K = \frac{2}{B^2 (e/m)}$$

folgt

(6) $$B = \sqrt{\frac{2}{K(e/m)}} \; .$$

Dieses Auswerteverfahren wird hier angewandt.

3. Auswertung und Ergebnis

Gemessen wurde die Differenz Δx der seitlichen Ablenkungen des Elektronenstrahls für vier Werte der Beschleunigungsspannung U. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Messwerte in den Spalten 1 und 2. Die Spalten 3 und 4 enthalten die aus Δx berechneten Werte für die Größen r und r^2. Dabei wurde für die Länge der Strecke, auf der die Elektronen abgelenkt werden, der Wert und $L = (0{,}117 \pm 0{,}002)$ m benutzt. Die Messung fand statt im Februar 2006.

Tabelle der Messwerte

U / kV	Δx / mm	r / m	r^2 / m^2
1,0	6,31 ± 0,38	2,17 ± 0,20	4,72 ± 0,88
1,5	5,29 ± 0,14	2,59 ± 0,16	6,72 ± 0,83
2,0	3,99 ± 0,49	3,43 ± 0,53	11,77 ± 3,67
2,5	3,81 ± 0,30	3,60 ± 0,41	12,98 ± 2,94

In Abb. 4 sind die Werte von r^2 (Spalte 4) als Funktion der Beschleunigungsspannung U (Spalte 1) aufgetragen. An die Messpunkte wurde, wie oben beschrieben, eine Nullpunktsgerade $y = Kx$ nach der Methode der kleinsten Quadrate angepasst.

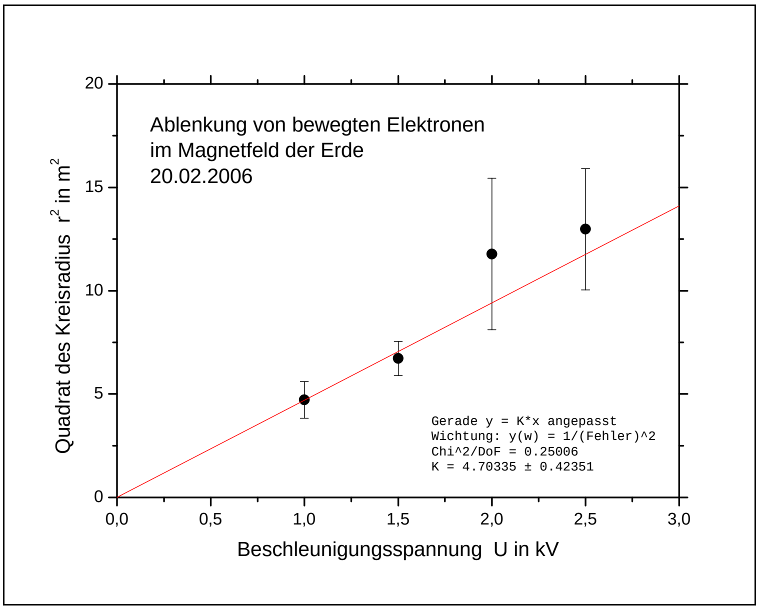

Abb. 4 Ablenkung von bewegten Elektronen im Magnetfeld der Erde. Die Elektronen bewegen sich auf einem Kreis senkrecht zu den Magnetfeldlinien. Aufgetragen ist das Quadrat des Kreisradius r^2 als Funktion der Spannung U, mit der die Elektronen beschleunigt werden. Die rote Gerade ist das Ergebnis einer Anpassung der Funktion $y = Kx$ nach der Methode der kleinsten Quadrate. Aus deren Steigung K ergibt sich nach Gl.(6) die Magnetfeldstärke B des Erdfeldes.

Sie ergab als Steigung $K = (4{,}07 \pm 0{,}42)\ \mathrm{m^2/kV}$. Daraus ergibt sich nach Gl. (6) eine Magnetfeldstärke von

$$B = (49 \pm 2)\ \mu\mathrm{T}$$

Zum Vergleich: Mit professionellen Magnetometern wurde im Februar 2006 in Fürstenfeldbruck ein Wert von 47,99 µT gemessen[2]. Das heißt, der von mir bestimmte Wert dürfte nicht ganz falsch sein.

Anmerkungen

[1] Die Größe B wurde früher (und wird zum Teil heute noch) *magnetische Flussdichte* oder *magnetische Induktion* genannt. Die Einheit von B ist 1 T (Tesla), definiert als $1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{Vs/m^2} = 1\ \mathrm{N/Am}$. Es gilt $1\ \mathrm{T} = 10^4$ Gauss.

[2] siehe z. B. www.geophysik.uni-muenchen.de/observatory/geomagnetism/yearly-magnetograms