1. Einleitung

Licht werde an einem Medium mit dem Brechungsindex n gestreut. Der Brechungsindex sei reell, Absorption finde nicht statt. Ist die Wechselwirkung mit dem Medium gering, lässt sich der Wirkungsquerschnitt für die Streuung mit Hilfe der *Bornschen Näherung* berechnen. Geringe Wechselwirkung bedeutet, dass der Brechungsindex n des Mediums nicht sehr stark von dem Brechungsindex der Umgebung abweicht. Der Einfachheit halber habe die Umgebung den Brechungsindex Eins. Wir setzen weiterhin voraus, dass das Medium eine Kugel mit dem Radius R ist und dort einen scharfen Rand hat.

2. Streuamplitude

Das einfallende Licht betrachten wir als ebene monochromatische Welle. Die Welle habe die Kreisfrequenz ω und die Wellenzahl $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ (c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, λ = Wellenlänge im Vakuum). Ihre Auslenkung ist damit proportional zu

(1) $$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} .$$

Dabei ist $\vec{r}$ der Vektor des Abstands vom Streuzentrum. Der von t (t = Zeit) abhängige Faktor ist allen Auslenkungen gemeinsam und wird in den nachfolgenden Rechnungen weg gelassen. Die Welle bewege sich in (positiver) z-Richtung, ihre Ortsabhängigkeit ist dann durch

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikz}$$

gegeben (Abbildung 1). Die Wechselwirkung erzeugt eine vom Streuzentrum nach allen Richtungen auslaufende Welle, die in einem weit entfernten Detektor nachgewiesen wird. Für große r (genauer $kr \gg 1$) ist dies eine Kugelwelle, deren Auslenkung proportional zu e^{ikr}/r ist. Ihre Amplitude wird im Allgemeinen vom Streuwinkel θ abhängen. Diese Abhängigkeit wird, wie üblich, durch einen Amplitudenfaktor $f(\theta)$ berücksichtigt. Da das Problem axialsymmetrisch ist, spielt der Azimutwinkel ϕ keine Rolle. Für den Faktor $f(\theta)$ hat sich der Name *Streuamplitude*

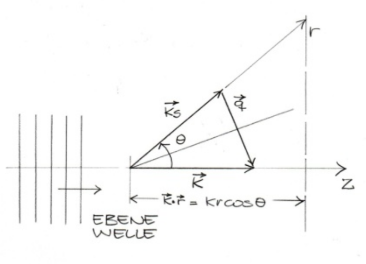

Abbildung 1 Geometrie eines Streuexperiments, elastische Streuung

eingebürgert. Insgesamt ergibt sich eine Auslenkung u, die der Summe aus einfallender ebener Welle und auslaufender Kugelwelle entspricht, also

(2) $$u(\vec{r}) = A\left[e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right] .$$

Eine strenge Begründung dieses naiven Ansatzes findet man beispielsweise bei Griffith[1]. Der vor der Klammer stehende Amplitudenfaktor A spielt für unsere Überlegungen keine Rolle. Wir sind an dem differentiellen Wirkungsquerschnitt interessiert, der die Wahrscheinlichkeit angibt für eine Streuung in eine gegeben Richtung θ. Er ist gleich dem Betragsquadrat von $f(\theta)$, also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 . \tag{3}$$

Die Streuamplitude $f(\theta)$ lässt sich mit Hilfe der Partialwellenmethode[2] exakt berechnen. Hier geht es, wie oben angedeutet, um die Näherungslösung, die nach *Max Born*[3] benannt ist.

3. Potenzial

Die in (1) genannte ebene Welle ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0 . \tag{4}$$

Genauer gesagt, erfüllt jede kartesische Koordinate der elektrischen oder magnetischen Feldstärke im Vakuum diese Gleichung. Sie folgt aus den *Maxwellschen Gleichungen* für den Fall, dass in dem betrachteten Raum weder Ladungen noch Ströme vorhanden sind. Setzt man für *u* die Lösung (1) ein, folgt

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nabla^2 u + k^2 u = 0 . \tag{5}$$

Das ist eine Helmholtz-Gleichung, sie gilt im Bereich außerhalb der Kugel. Innerhalb der Kugel ist die Lichtgeschwindigkeit um den Faktor *n* kleiner, so dass hier gilt

$$\nabla^2 u + n^2 k^2 u = 0$$

(auch eine Helmholtz-Gleichung). Beide Gleichungen können zusammengefasst werden, wenn man schreibt

$$\nabla^2 u + n^2 k^2 u + k^2 u - k^2 u = 0$$

oder

$$\nabla^2 u + k^2 u = -4\pi \cdot \frac{1}{4\pi} k^2 \left[n^2(\vec{r}) - 1 \right] u = -4\pi \cdot F_0(\vec{r})\, u \tag{6}$$

und dabei vereinbart

$$F_0(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} k^2 (n^2 - 1) & \textit{für} \quad 0 \le r \le R \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

(Abbildung 2). Damit ist F_0 das Streupotenzial, an dem die Welle gestreut wird. Gleichung (6)

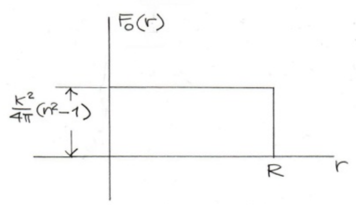

Abbildung 2 Streupotential einer dielektrischen Kugel mit scharfem Rand bei R

lässt sich unter Anwendung „heftigster Analysis" (Griffiths[4]) in Integralform schreiben als

(8) $$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) - \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} F_0(\vec{r}')u(\vec{r}')d^3\vec{r}' ,$$

wobei u_0 die Lösung von (5) ist, also die ungestörte Welle beschreibt. Das Integral erstreckt sich über den Raum, in dem F_0 verschieden von Null ist, in unserem Fall über das Innere der Kugel mit dem Radius R.

4. Beobachtung für r → ∞ und Bornsche Näherung

Gleichung (8) sieht aus wie eine Lösung für u – ist es aber nicht, denn das u taucht auch auf der rechten Seite unter dem Integral auf. Mit diesem u befasst sich die Bornsche Näherung. Bevor sie zur Anwendung kommt machen wir Gebrauch von der Tatsache, dass die gestreute Welle weit entfernt von unserem Streuobjekt beobachtet wird. Das heißt, es gilt $r' \ll r$. Unter dieser Voraussetzung kann man im Integral den Exponenten der e-Funktion vereinfachen. Es ist nämlich

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' \cong r^2\left(1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &\cong r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}} \\ &\cong r\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) . \\ &\cong r - \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}' \end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{r}/r$ der Einheitsvektor $\hat{\vec{r}}$ in Richtung auf den Beobachtungspunkt. Weiterhin folgt

$$k|\vec{r} - \vec{r}'| \cong kr - k\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}' = kr - k\hat{\vec{r}}\cdot\vec{r}' = kr - \vec{k}_s\cdot\vec{r}' .$$

Mit

$$\vec{k}_s = k\hat{\vec{r}}$$

ist der Wellenzahlvektor bezeichnet, der vom Streuzentrum aus auf den Beobachtungspunkt zeigt. Er bildet mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$ der einfallenden Welle den Winkel θ (Abbildung 1). Da wir elastische Streuung betrachten (n sei reell wie oben vorausgesetzt), bleibt die Wellenzahl dem Betrag nach erhalten:

$$|\vec{k}_s| = |\vec{k}| = k .$$

Der Nenner des Integrals (8) ändert sich – im Gegensatz zu $e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'}$ im Zähler – über den Integrationsbereich nur wenig, so dass man hier näherungsweise setzen kann

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \cong r .$$

Damit wird Gleichung (8) zu

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) - \frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'} F_0(\vec{r}')u(\vec{r}')d^3\vec{r}' .$$

Die *Bornsche Näherung* besteht nun darin, im Integral die Wellenfunktion u durch u_0 zu ersetzen, das heißt, (bis auf einen Normierungsfaktor) durch

$$u_0(\vec{r}') = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} .$$

Das führt zu

$$(9) \qquad u(\vec{r}) = A\left[e^{ikz} - \frac{e^{ikr}}{r}\int e^{i(\vec{k} - \vec{k}_s)\cdot\vec{r}'} F_0(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'\right],$$

wobei auch hier der Faktor A und weitere möglicherweise vorhandenen Normierungsfaktoren unerheblich sind. Vergleicht man die rechte Seite mit dem entsprechenden Term in Gleichung (2), erkennt man, dass die Streuamplitude (bis auf Normierungsfaktoren) in Bornscher Näherung gegeben ist durch

$$(10) \qquad f(\theta) = \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}_s)\cdot\vec{r}'} F_0(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'$$

Es ist nun üblich, die Vektordifferenz $\vec{k} - \vec{k}_s$ mit $\vec{q}$ zu bezeichnen:

$$(11) \qquad \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_s .$$

In der Quantenmechanik ist $\vec{q}$ der Impuls (geteilt durch $\hbar$), der auf das Streuobjekt übertragen wird. Für den Betrag gilt

$$(12) \qquad q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(Abbildung 1). Gleichung (10) wird damit zu

$$(13) \qquad f(\theta) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} F_0(\vec{r}')\, d^3\vec{r}' .$$

Da das Potenzial F_0 kugelsymmetrisch ist, führen wir die Integration über $\vec{r}'$ in Kugelkoordinaten aus. Es ist sinnvoll, die Polarachse in die Richtung von $\vec{q}$ zu legen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{q}\cdot\vec{r}' &= qr'\cos\theta' \\ d^3\vec{r}' &= r'^2\sin\theta' dr'\, d\theta'\, d\phi' \end{aligned}$$

und die Streuamplitude wird zu

$$f(\theta) = \int e^{-iqr'\cos\theta'} F_0(r')\, r'^2 \sin\theta' dr'\, d\theta'\, d\phi' .$$

Da der Integrand nicht von ϕ abhängt, ergibt die Integration über das Azimut 2π. Das Integral über θ lässt sich mit Hilfe der folgenden Substitution lösen:

$$\begin{aligned} \cos\theta' &= u \\ du &= -\sin\theta' d\theta' \\ \theta' = 0 &\rightarrow u = 1 \\ \theta' = \pi &\rightarrow u = -1 \end{aligned} .$$

Also

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ldots\, d\theta' &= -\int_1^{-1} e^{-iqr'u}du \\ &= \left.\frac{e^{-iqr'u}}{iqr'}\right|_1^{-1} \\ &= -i\frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{qr'} \\ &= \frac{2\sin(qr')}{qr'}\end{aligned}\;.$$

Damit bleibt die Integration über r':

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \int_0^{\infty} F_0(r')\frac{2\sin(qr')}{qr'}2\pi\, r'^2 dr' \\ &= \frac{4\pi}{q}\int_0^{\infty} r'\, F_0(r')\sin(qr')\, dr'\end{aligned}\;.$$

Da F_0 im Intervall $[0; R]$ konstant ist und dort den Wert $k^2(n^2 - 1)/4\pi$ hat, folgt weiter

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{4\pi}{q}\frac{k^2}{4\pi}(n^2 - 1)\int_0^R r'\, \sin(qr')\, dr' \\ &= \frac{k^2}{q}(n^2 - 1)\int_0^R r'\, \sin(qr')\, dr'\end{aligned}\;.$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit partieller Integration berechnen (Übungsaufgabe). Es ergibt

$$\frac{\sin(qR) - qR\cos(qR)}{q^3}\;,$$

so dass für die Streuamplitude schließlich folgt

$$f(\theta) = k^2(n^2 - 1)R^3\frac{\sin(qR) - qR\cos(qR)}{(qR)^3}\;. \tag{14}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird damit (bis auf einen Normierungsfaktor)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (n^2 - 1)^2 k^4 R^6\left[\frac{\sin(qR) - qR\cos(qR)}{(qR)^3}\right]^2\;. \tag{15}$$

mit $q = 2k\sin(\theta/2)$. Der Term in der Klammer ist im Übrigen $j_1(qR)$, die sphärische Besselfunktion erster Ordnung von qR (Nullstellen bei 4,493; 7,725; 10,904; …). Für $qR \to 0$ geht die Klammer gegen 1/3, so dass der Wirkungsquerschnitt in diesem Grenzfall proportional zu k^4 oder $1/\lambda^4$ ist. Das ist die bekannte Wellenlängenabhängigkeit der *Rayleigh-Streuung*: blaues Licht wird viel stärker gestreut als rotes.

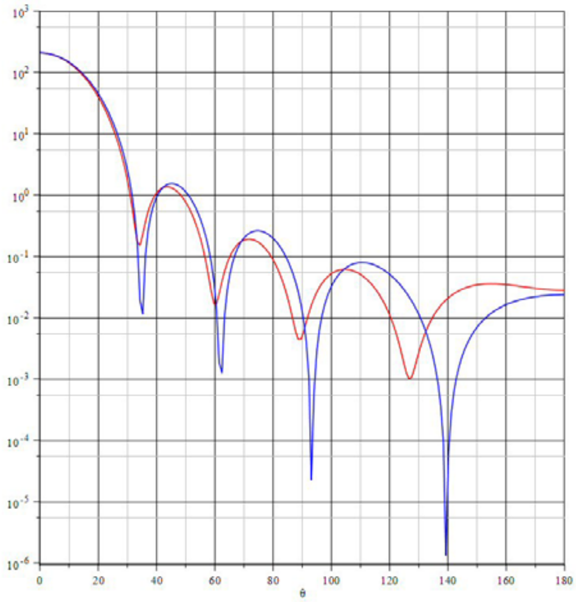

Abbildung 3 Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung einer elektromagnetischen Welle an einer dielektrischen Kugel (Brechungsindex n = 1.05, Radius R = 1.2λ oder kR = 7.5). Bornsche Näherung (blau) und exakte Rechnung nach Lorenz-Mie (rot). Die Kurve der Bornschen Näherung wurde auf den Wert bei θ = 0° der exakten Rechnung normiert, ihre Minima wären bei einer genaueren Skizze Nullstellen.

Für Brechungsindizes, die nicht viel größer als 1 sind, sollte die Bornsche Näherung in etwa denselben Wirkungsquerschnitt ergeben wie die exakte Rechnung. Das ist, wie Abbildung 3 zeigt, in der Tat der Fall.

Anmerkungen und Literatur

[1] D. J. Griffiths, Quantenmechanik, Pearson, 2012, S. 444

[2] D. J. Griffiths, Quantenmechanik, Pearson, 2012, S. 445

[3] Max Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Zeitschrift für Physik. 37, Nr. 12, 1926, S. 863–867

[4] D. J. Griffiths, Quantenmechanik, Pearson, 2012, S. 455. Das Zitat „heftigste Analysis“ findet sich in der Fußnote auf dieser Seite, es betrifft die mathematischen Geschütze *Greensche Funktion* und *Cauchy'sche Integralformel* (Konturintegrale), die bei der Herleitung von Gleichung (8) zum Einsatz kommen.