

1. Einleitung

Hall-Spannungen im Schulunterricht zu messen erfordert einen gewissen Aufwand. Mit dem Experimentiermaterial, das die Lehrmittelindustrie¹ bereitstellt, erreicht man bei Metallen Werte von der Größenordnung μV (Bei Halbleitern sind sie wegen der geringeren Elektronendichte etwas größer). Die Hall-Konstante für Kupfer lässt sich damit laut Herstellerangaben mit einem Fehler von etwa $\pm 1\%$ bestimmen². Diese Genauigkeit ist für ein Schulexperiment erstaunlich. Es fragt sich, ob sie auch im alltäglichen Physikunterricht erreichbar ist. Denn der muss in der Regel auf vorhandenes Sammlungsmaterial zurückgreifen, oft sind auch einzelne Teile der Apparatur für den Versuch erst aufzubauen. Diese Einschränkungen trafen auf das hier beschriebene Experiment zu.

2. Theorie

Die Hallspannung entsteht durch die Ablenkung bewegter Ladungsträger im Magnetfeld. Derartige Ladungsträger sind beispielsweise die frei beweglichen Leitungselektronen eines Metalls. Das Metall hat im vorliegenden Experiment die Form einer sehr dünnen rechteckigen Platte (Abbildung 1). Die Dicke der Platte sei d , ihre Breite b . Das Magnetfeld, das die Ablenkung verursacht, habe die Stärke B . Es dringt durch die Platte hindurch und steht senkrecht auf der Plattenebene. Die Platte wird in Längsrichtung von einem Strom I_s , dem so

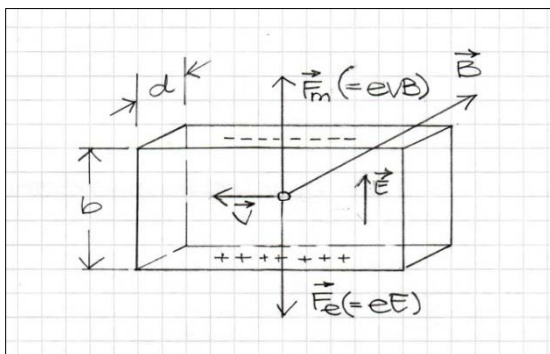


Abbildung 1 Halleffekt schematisch

genannten Steuerstrom, durchflossen. Diesem Strom entspricht eine Driftbewegung der Elektronen senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfeldes (und entgegengesetzt zur klassischen Stromrichtung). Bei einer Driftgeschwindigkeit v wirkt auf die Elektronen, ihre Ladung werde wie üblich mit e bezeichnet, die Lorentzkraft evB – und zwar senkrecht zu den Feldlinien und senkrecht zur Richtung der Driftgeschwindigkeit. Die Richtung der Lorentzkraft ergibt sich aus der rechten Hand-Regel, in Abbildung 1 lenkt sie die Elektronen nach oben ab. Dadurch lädt sich der obere Rand der Platte negativ auf. Am unteren Rand fehlen negative Ladungen, so dass dieser positiv geladen ist. Daher entsteht zusätzlich zum Magnetfeld ein elektrisches Feld der Stärke E , das die Elektronen mit der Kraft eE nach unten zieht. Nach sehr kurzer Zeit (10^{-19} s) sind Lorentzkraft und elektrische Kraft gleich groß³, also gilt

$$(1) \quad evB = eE \quad \text{oder} \quad vB = E.$$

Die elektrische Feldstärke ist, wenn das Feld als homogen angenommen wird, gleich der Spannung zwischen oberem und unterem Plattenrand, geteilt durch die Breite b der Platte.

Diese Spannung ist die hier interessierende Hallspannung U_H . Daher gilt

$$(2) \quad \frac{U_H}{b} = vB \quad \text{oder} \quad U_H = b v B .$$

Die Driftgeschwindigkeit v lässt sich durch die Stromstärke I_S des Steuerstroms ausdrücken. Dazu betrachte die Ladung ΔQ , die in der Zeit Δt durch den Plattenquerschnitt bd fließt. Für sie gilt

$$(3) \quad I_S = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = e \frac{\Delta N}{\Delta t} .$$

Dabei ist ΔN die Anzahl der Elektronen, die in Δt durch den Plattenquerschnitt hindurch treten. Ist die Elektronendichte (Anzahl der Elektronen/m³) in der Platte n , lässt sich ΔN mit dem Volumen ΔV des Elektronengases verknüpfen, das in der Zeit Δt die Querschnittsfläche passiert. Dieses Volumen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v , hat also in Bewegungsrichtung die Länge $v\Delta t$. Also ist $\Delta V = b d v \Delta t$ und es gilt

$$(4) \quad \frac{\Delta N}{\Delta t} = n \frac{\Delta V}{\Delta t} = n \frac{b d v \Delta t}{\Delta t} = n b d v .$$

Damit folgt aus Gl. (3) für den Steuerstrom $I_S = e n b d v$ und für die Driftgeschwindigkeit

$$(5) \quad v = \frac{I_S}{e n b d} .$$

Setzt man diesen Term in Gl. (2) ein, ergibt sich für U_H

$$(6) \quad U_H = \frac{1}{ne} \frac{B I_S}{d} = R_H \frac{B}{d} I_S .$$

Dabei ist $R_H = 1/ne$ die so genannte Hallkonstante. Aus der Hallspannung lässt sich daher bei Kenntnis der Größen I_S , B und d die Dichte n der beweglichen Ladungsträger des Metalls bzw. Halbleiters bestimmen. Im Fall des Kupfers ist es die Elektronendichte.

3. Abschätzung der Hallspannung

Es wurde schon angedeutet, dass im Alltagsbetrieb des Physikunterrichts improvisiert werden muss. Das war im vorliegenden Experiment auch der Fall: Ein Messverstärker mit einem Verstärkungsfaktor von etwa 10^5 , wie er in der Versuchsanleitung² empfohlen wird, stand nicht zur Verfügung. Er wurde durch einen Selbstbau-Verstärker ersetzt, dessen Verstärkungsfaktor nur 10^2 betrug und deshalb als Anzeigeelement ein empfindliches mV-Meter erforderte. Um eine möglichst große Hallspannung zu erzeugen, wurde der Elektromagnet (Phywe-Magnetjoch #06501.00) mit zwei Erregerspulen zu je 600 Windungen versehen. Die Spulen können lt. Datenblatt mit maximal 2 A belastet werden und erzeugen bei dieser Stromstärke ein Magnetfeld von etwa $B = 400$ mT im Luftspalt. Der Strom durch die Erregerspulen wurde einer 12 V-Autobatterie entnommen. Ein regelbarer Vorwiderstand ($11 \Omega/8$ A) diente zur Strombegrenzung. Für die Messung wurde die Stromstärke auf etwa 2,5 A erhöht, so dass ein B -Feld von ca. 500 mT zur Verfügung stand. Die Erwärmung der Erregerspulen wegen der erhöhten Stromstärke war minimal. Als Halleffekt-Trägerplatte wurde das Modell #11803.00 der Firma Phywe benutzt. Sie hat die Dicke $d = 18 \mu\text{m}$ ($\pm 20\%$) und ist für Steuerströme bis $I_S = 20$ A (Dauerbelastung) geeignet. Der Steuerstrom wurde einer zweiten Autobatterie entnommen und mit Hilfe eines weiteren regelbaren $11 \Omega/8$ A-Vorwiderstands variiert. Um diesen Widerstand nicht zu überlasten, musste der Steuerstrom auf maximal 8 A begrenzt werden.

Die genannten Einschränkungen begrenzen die maximal messbare Hallspannung: Mit den Werten $B = 500$ mT, $I_S = 8$ A und $d = 18 \mu\text{m}$ ergibt sich für Kupfer⁴ ein Wert von etwa $U_H =$

– $13 \mu\text{V}$. Zur Anzeige wird diese um den Faktor 100 verstärkt, so dass im Anzeigeeinstrument $1,3 \text{ mV}$ gemessen werden. Als Anzeigeeinstrument dient das Multimeter VC960 (Fa. Conrad), mit dem sich Spannungen mit einer Genauigkeit von $\pm 10 \mu\text{V}$ ablesen lassen (im Bereich mV). Das sind weniger als 1% der erwarteten $1,3 \text{ mV}$. Der Effekt müsste also trotz der improvisierten Anordnung messbar sein. Bei nicht zu großen systematischen Fehlern sollten sich signifikante Werte ergeben.

4. Messanordnung

Abbildung 2 zeigt das Schema der Messanordnung. Ein C-förmiger Elektromagnet mit zwei Erregerspulen von je 600 Windungen dient zur Erzeugung des benötigten Magnetfelds. Durch die Spulen fließt ein Strom der Stärke $2,49 \text{ A}$, er wird mit Hilfe eines regelbaren 11Ω -Widerstands auf diesen Wert eingestellt. Laut Datenblatt sind maximal 2 A erlaubt, die

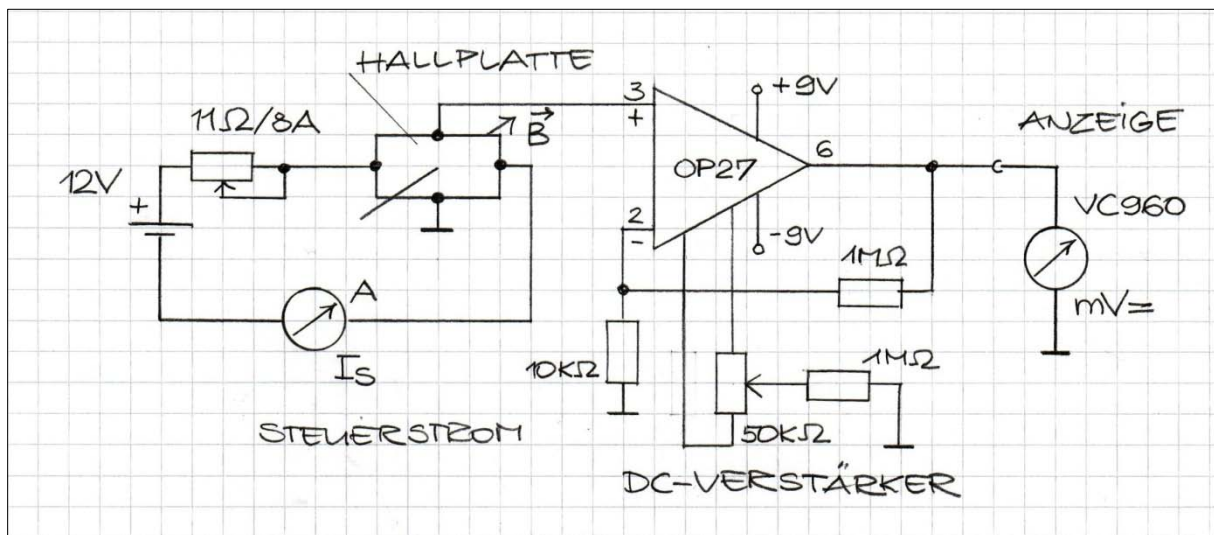


Abbildung 2 Stromlaufplan Messung der Hallspannung

Erwärmung durch den größeren Strom ist jedoch gering, zumal der immer nur kurzzeitig fließt. Der Strom wird einer 12 V -Autobatterie entnommen. Er ist im Verlauf einer Messung nicht völlig konstant, der dadurch bedingte Fehler der Feldstärke wird zu etwa 4% abgeschätzt. Das Feld im Luftspalt des Magneten wird mit einem geeichten Magnetfeldmessgerät (Phywe #11749.93 mit Axialsonde, Messbereich 1000 mT) gemessen. Dessen Anzeigenauigkeit beträgt laut Herstellerangabe $\pm 2\%$. Addiert man beide Fehler linear, ergibt sich eine Genauigkeit von $\pm 6\%$ für den Wert von B . Gemessen wird $B = 482 \text{ mT}$, der Fehler beträgt daher $\pm 28 \text{ mT}$. In der Auswertung der Messung weiter unten wird also $B = 482 \pm 28 \text{ mT}$ gesetzt.

Im Luftspalt des Elektromagneten befindet sich die Hall-Platte (Phywe #11803.00), deren Ebene senkrecht von den Feldlinien des Magnetfelds durchstoßen wird. Ihre Dicke wird mit $d = 18,0 \pm 3,6 \mu\text{m}$ ($\pm 20\%$) angegeben. Sie wird vom Steuerstrom I_S durchflossen. Der wird von einer zweiten 12 V -Autobatterie geliefert und kann mit Hilfe eines weiteren regelbaren Vorwiderstands ($11 \Omega/8 \text{ A}$) variiert werden.

Senkrecht zur Richtung des Steuerstroms wird an den Rändern der Hall-Platte die Hallspannung U_H abgegriffen. Sie ist von der Größenordnung μV und wird in einem Gleichstrom-Verstärker um den Faktor 100 angehoben. Er besteht aus einer nicht-invertierenden Schaltung mit dem Operationsverstärker *OP27*, dessen Spannungsverstärkung v_U durch die Widerstandskombination $1\text{ M}\Omega/10\text{ k}\Omega$ ($v_U \cong 100$) gegeben ist (Abbildung 2). Der Fehler des Verstärkungsfaktors wird zu 4% abgeschätzt, er geht also mit $v_U = 100 \pm 4$ in das Messergebnis ein.



Abbildung 3 Messanordnung

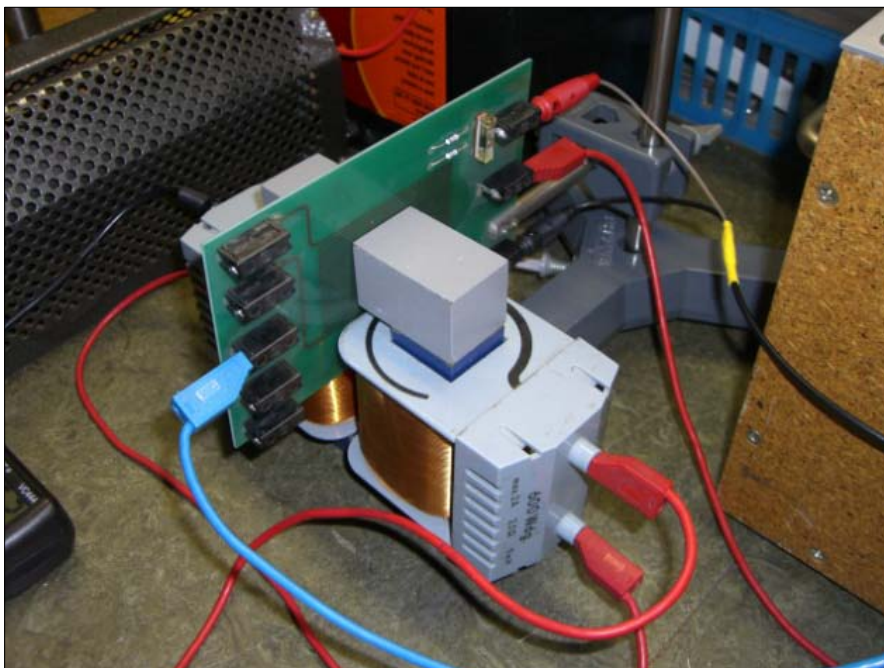


Abbildung 4 Messanordnung, Elektromagnet und Hall-Trägerplatte

5. Messung

Gemessen wird die Hallspannung U_H bei konstanter Magnetfeldstärke $B (= 482 \pm 28 \text{ mT})$ in Abhängigkeit vom Steuerstrom I_S . Um die Unsymmetrie der an der Platte abgegriffenen Spannung auszugleichen, die durch versetzte Abgreifpunkte entstehen (und die sich U_H überlagert), wird diese Spannung jeweils für *beide* Richtungen des Steuerstroms (hin und zurück) gemessen. Der durch den Steuerstrom bedingte Spannungsabfall zwischen den Abgreifpunkten sollte sich in der Differenz der so gemessenen Spannungen wegmitteln. Das heißt, diese Differenz ist das Zweifache von U_H . Das Vorzeichen der Hallspannung folgt aus der Tatsache, dass U_H die in Abbildung 1 skizzierte Polarität hat. Die Ladungsträger, die U_H hervorrufen, sind daher negativ geladen. Hallspannung und Hallkonstante erhalten dem gemäß ein Minuszeichen.

Gemessen wurde bei konstanter Magnetfeldstärke $B = 482 \pm 28 \text{ mT}$ und Werten des Steuerstroms von $I_S = \pm 2, \pm 4, \pm 6$ und $\pm 8 \text{ A}$. Tabelle 1 zeigt das Ergebnis der Einzelmessungen. Jede Messung wurde mehrfach wiederholt, daher ließ sich aus der Streuung der gemessenen Hallspannungen ein Fehler abschätzen. Dieser ist in der Zusammenfassung der Messdaten in Tabelle 2 hinter dem Mittelwert von U_H aufgeführt. Abbildung 5 zeigt die

Tabelle 1 Protokoll der Einzelmessungen. Gemessen wird bei konstanter Magnetfeldstärke $B = 482 \pm 28 \text{ mT}$, variiert wird der Steuerstrom I_S . Die Hallspannung U_H wurde jeweils zwei Mal gemessen, einmal mit dem Steuerstrom in Vorwärtsrichtung ($+I_S$), das andere Mal in umgekehrter Richtung ($-I_S$). In der Differenz der beiden Werte von U_H hebt sich der Spannungsabfall zwischen den Abgreifpunkten der Hallspannung weg. Der Messwert (rechte Spalte) ist die Hälfte dieser Differenz.

Messung Nr.	I_S / A	$U_H / \mu\text{V}$		
		$+I_S$	$-I_S$	$(U_H(+I_S) - U_H(-I_S))/2$
1	2	-9,4	-5,1	-2,15
2	4	-12,9	-3,4	-4,75
3	8	-17,3	+2,2	-9,75
4	2	-8,0	-3,6	-2,20
5	4	-10,9	-1,3	-4,80
6	6	-13,7	+2,2	-7,95
7	8	-16,2	+2,3	-9,25
8	6	-11,9	+2,6	-7,25
9	8	-14,3	+7,2	-10,75
10	6	-11,8	+2,2	-7,00
11	8	-13,9	+5,6	-9,75
12	2	-4,4	-0,8	-1,80
13	4	-8,2	+1,4	-4,80

Tabelle 2 Zusammenfassung der Messdaten. I_S variiert, B konstant ($B = 482 \pm 28 \text{ mT}$). Der Fehler des Mittelwerts wurde aus der Streuung der Einzelmessungen abgeschätzt

I_S / A	$U_H / \mu\text{V}$				Mittelwert
	Einzelmessungen (Tabelle 1)				
2	-2,15	-2,20	-1,80	-	$-2,05 \pm 0,25$
4	-4,75	-4,80	-4,80	-	$-4,78 \pm 0,10$
6	-7,95	-7,25	-7,00	-	$-7,40 \pm 0,40$
8	-9,75	-9,25	-10,75	-9,75	$-9,88 \pm 0,87$

entsprechenden Messpunkte, eingetragen in ein Koordinatensystem mit I_S als horizontaler und U_H als vertikaler Achse. Sie liegen, wie erwartet, auf einer ansteigenden Geraden. Eine Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt, dass diese Gerade nicht genau durch den Nullpunkt geht. Die Abweichung des Achsenabschnitts von Null ist jedoch

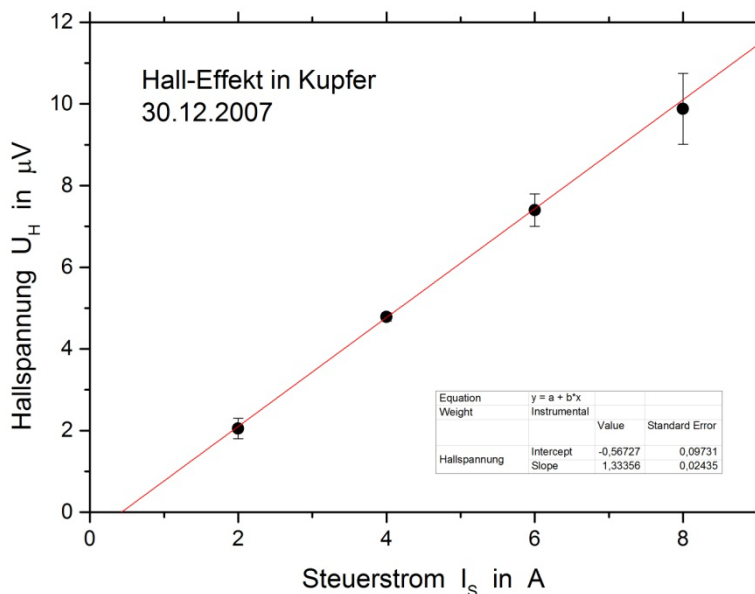


Abbildung 5 Daten der Tabelle 2 als Messpunkte: Hallspannung U_H als Funktion des Steuerstrom I_S bei konstanter Magnetfeldstärke $B = 482 \text{ mT}$

angesichts der wenigen Messpunkte und deren Fehlerbalken nicht signifikant. Die Steigung der Geraden ist $K = 1,334 \pm 0,024 \mu\text{V/A}$ ($\pm 1,8\%$). Nach Gl. (6) ist $K = R_H B/d$, so dass daraus als Hallkonstante folgt

$$R_H = - \frac{1,334 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{0,482 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} = - 4,98 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$$

Der Fehler von R_H setzt sich aus den schon genannten Anteilen zusammen. Die lineare Addition ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R_H}{R_H} &= \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta v_U}{v_U} \\ &= 1,8\% + 6\% + 20\% + 4\% \\ &\cong 32\% \end{aligned}$$

Damit lautet das (sinnvoll gerundete) Ergebnis der vorliegenden Messung

$$R_H = - (5,0 \pm 1,6) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{As}$$

Dieser Wert ist innerhalb der Fehlergrenzen mit dem Literaturwert $R_H = - 5,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{As}$ verträglich. Der für R_H abgeschätzte Fehler erweckt nicht den Eindruck einer Präzisionsmessung, ist aber realistisch. Er widerspricht jedenfalls nicht der Bedienungsanleitung⁵ des

Herstellers, in der bemerkt wird: „Die Messung der Hallspannung an der Kupferbahn ist ... relativ ungenau, so dass die Hallkonstante nur grob abschätzbar ist.“

Die Bemerkung in der Herstelleranleitung klingt im Übrigen so, als ob ein (Demonstrations-) Experiment, das nicht den genauen Wert einer physikalischen Konstanten liefert, von minderm Wert ist. Diese in der Schulphysik verbreitete Ansicht ist falsch. Denn das Experiment liefert ja einen Wert, den jedoch mit einer vergleichsweise großen Unsicherheit. Man schätzt diese ab und gibt sie als „Fehler“ der Messung an. Der „Fehler“ ist jedenfalls nicht die Abweichung des Messwertes vom Literaturwert – kann es auch nicht sein, weil dieser bei einer z. B. erstmaligen Messung noch nicht vorliegt. Vielleicht sollte man im Physikunterricht der Schule gelegentlich darauf hinweisen, dass es bei einem Experiment nicht so sehr darauf ankommt, den „richtigen“ Wert zu messen, sondern den „Fehler“ richtig abzuschätzen.

Anmerkungen

¹ Versuchsbeschreibung der Fa. Phywe: <https://www.phywe.de/de/hall-effekt-in-metallen.html#tabs3>

² Phywe gibt an: $R_H = (-0,576 \pm 0,006) \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$ (Ergebnis einer Messreihe $U_H = f(B)$) und $R_H = (-0,554 \pm 0,006) \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$ (Ergebnis einer Messreihe $U_H = f(I)$)

³ siehe z. B. Gerthsen, Kapitel 7.1.4. Das E -Feld baut sich innerhalb einer Zeit auf, die durch die elektrische Relaxationszeit gegeben ist. Diese ist für Metalle von der Größenordnung 10^{-20} s .

⁴ Die Hallkonstante für Kupfer beträgt $R_H = -5,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{As}$. Also ist

$$U_H = R_H \frac{B}{d} I_S = -5,9 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{As}} \frac{0,5 \frac{\text{Vs}}{\text{m}}}{18 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \cdot 8 \text{ A} = -13 \mu\text{V}$$

⁵ Phywe, Bedienungsanleitung zum Versuch Halleffekt, Kupfer – Trägerplatte #11803.00