Eine harmlose Hausaufgabe aus der Elektrizitätslehre spannt den Bogen zur Kunst – und anderen Gebieten.

Ein Serienkreis aus Spule und Kondensator und ein Parallelkreis, gebildet aus einer Spule und einem Kondensator mit derselben Induktivität bzw. Kapazität, sind in einem Stromkreis hintereinander geschaltet (Abb. 1).

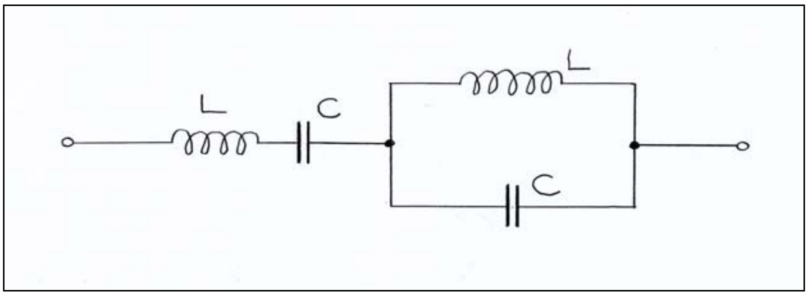

Abb. 1 Serien- und Parallelkreis von Spule und Kondensator hintereinander geschaltet. Induktivität L und Kapazität C von Spule bzw. Kondensator sind in beiden Kreisen gleich. Die Schaltung ist an einen Wechselstromgenerator variabler Frequenz angeschlossen.

Der Kreis wird von einem Wechselstromgenerator angetrieben, dessen Frequenz variierbar ist. Gegeben sind die Induktivität L der Spule und die Kapazität C des Kondensators. Frage: Bei welcher Frequenz f (oder Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$) verschwindet der Wechselstromwiderstand der Schaltung?

Wir starten mit der komplexen Impedanz des Kreises

$$\underline{Z} \;=\; \left(\frac{1}{j\omega C} \;+\; j\omega L\right) \;+\; \frac{\frac{1}{j\omega C}\cdot j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} \;+\; j\omega L} \;.$$

Sie lässt sich umformen in

$$\underline{Z} \;=\; j\,\frac{\frac{L}{C} \;-\; \left(\omega L \;-\; \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\omega L \;-\; \frac{1}{\omega C}} \;.$$

Wie erwartet, ist Z rein imaginär. Die Forderung $Z = 0$ führt zur Gleichung

$$\left(\omega L \;-\; \frac{1}{\omega C}\right)^2 \;=\; \frac{L}{C}$$

oder

$$(\omega^2 LC \;-\; 1)^2 \;=\; \omega^2 LC \,.$$

Mit der Abkürzung $\omega^2 LC = x$ wird daraus

$$x^2 - 2x + 1 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Damit wird die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\sqrt{\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

also folgt für die beiden Lösungen

$$\omega_1 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})\frac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}61833989....\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_2 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})\frac{1}{\sqrt{LC}} = 0{,}61833989....\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Damit ist das Ziel erreicht: Die Zahlen 1,61833989… und 0,61833989… sind die Teilverhältnisse des *Goldenen Schnitts*[1]. Wer hätte gedacht, dass der hier eine Rolle spielt?

Zur Erinnerung: Mit „Schnitt“ bezeichnet man die Teilung einer Strecke. Wir teilen beispielsweise eine Strecke der Länge 1 Meter. Der *Goldene Schnitt* entsteht, wenn der Teilungspunkt 0,61833989… Meter von linken (oder rechten) Ende entfernt ist. Dann verhält sich die Länge der ganzen Strecke (1 m) zur Länge der längeren Teilstrecke (0,618… m) wie die Länge dieser Teilstrecke zur Länge der kürzeren Teilstrecke (mit der Länge 1 – 0,618… m). Rechne nach:

$$\frac{1}{0{,}618...} = \frac{0{,}618...}{1 - 0{,}618...}.$$

In Abb. 2 ist die Impedanz Z als Funktion von ω in einem Koordinatensystem aufgetragen. Sie wurde berechnet für $L = 50$ mH und $C = 20$ nF. Damit werden

$$\omega_1 = 19544\,/\mathrm{sec}$$
$$\omega_2 = 51167/\mathrm{sec}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 31623/\mathrm{sec}.$$

Mit der Bezeichnung $1/\sqrt{(LC)} = \omega_0$ gilt dann hier

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 - \omega_0} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0 - \omega_1},$$

oder, numerisch

$$\frac{51167-19544}{51167-31623} = \frac{51167-31623}{31623-19544}.$$

Die Strecke $\omega_2 - \omega_1$ mit dem Teilungspunkt ω_0 ist in Abb. 2 rot markiert.

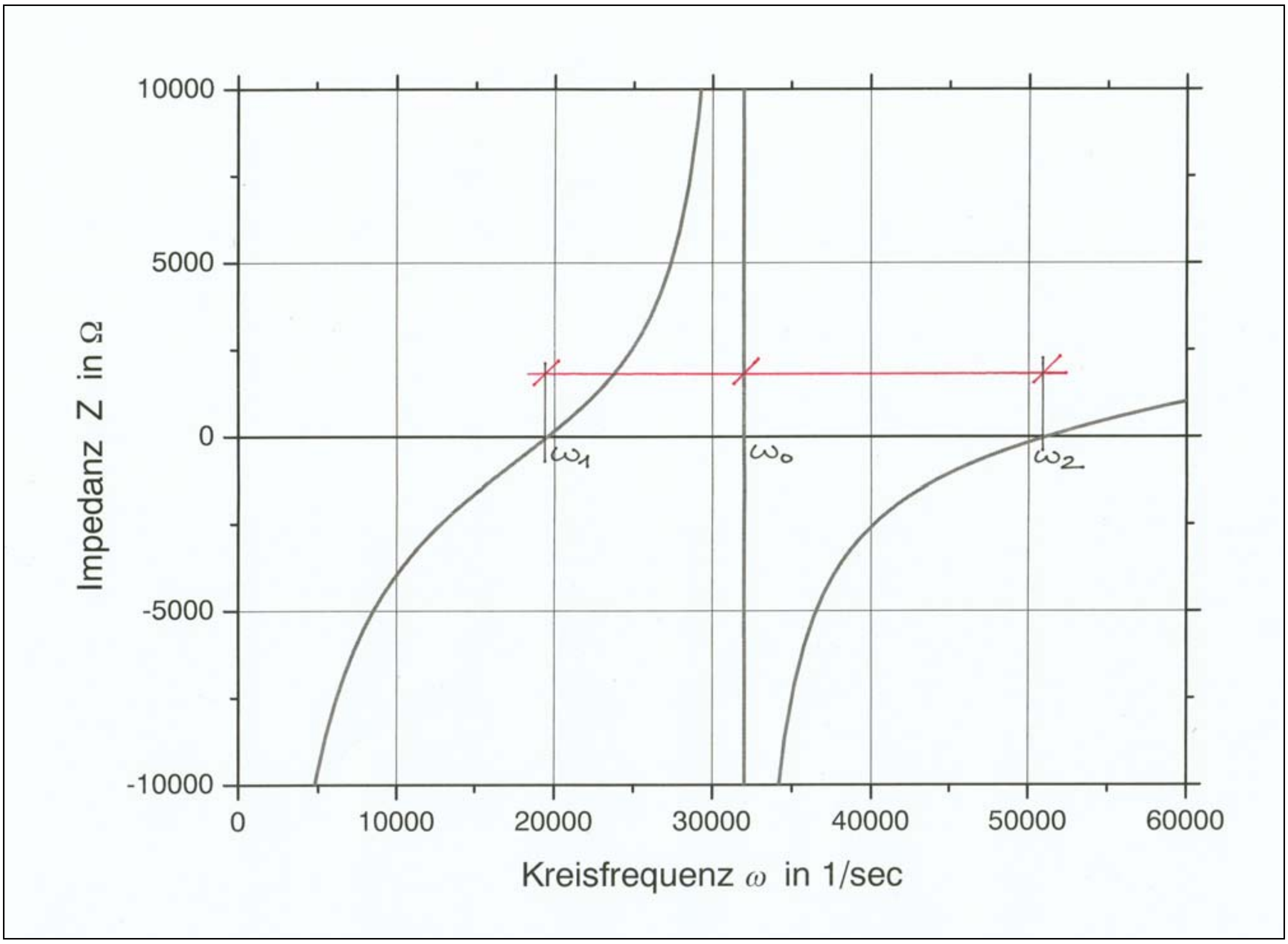

Abb. 2 Impedanz Z des Kreises der Abb. 1, aufgetragen als Funktion der Kreisfrequenz ω. Die Strecke zwischen den Nullstellen von Z, nämlich ω_1 = 19544/sec und ω_2 = 51167/sec wird von der senkrechten Gerade an der Stelle ω_0 = 31623/sec im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt.

Die oben berechneten Werte ω_1 und ω_2 sind die Nullstellen von Z – das heißt, die Stellen, an denen die Kurve die horizontale Achse schneidet. Die senkrechte Gerade kennzeichnet die Stelle, an der ω gleich dem Wert $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$ ist. Sie teilt die Strecke zwischen den Nullstellen im Verhältnis des Goldenen Schnitts.

[1] Mehr über den Goldenen Schnitt steht z. B. bei *A. Beutelspacher* und *B. Petri*: Der Goldene Schnitt, *BI*-Verlag, Mannheim 1989