

1. Einleitung

Band III des *Berkeley-Kurses Physik* („Waves“)¹ ist eine wahre Fundgrube für Anregungen zu Hobby-Experimenten – mit interessanten physikalischen Fragestellungen. Im Buch heißen sie

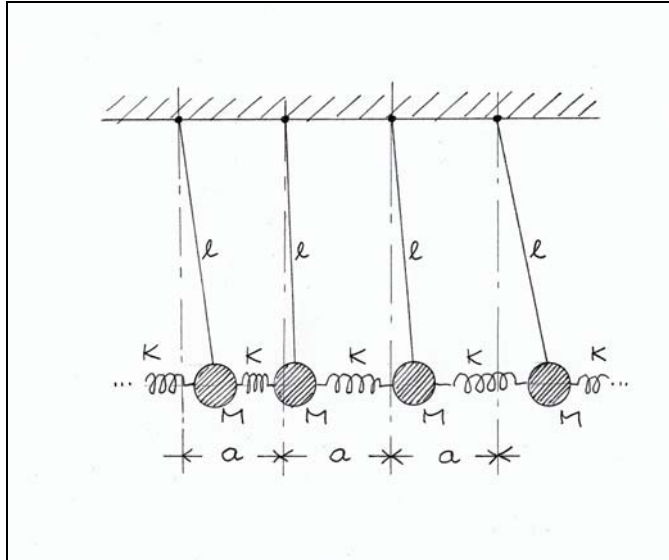


Abb. 1 Gekoppelte Pendel, nach Crawford: Berkeley Physics Course, Band III, *Waves*

„home experiments“. Beispielsweise vergleicht Frank S. Crawford, der Autor des Buchs, erzwungene Schwingungen eines Plasmas mit denen einer Reihe gekoppelter Pendel. Die Pendel sind Fadenpendel gleicher Pendelmasse M und gleicher Länge l . Sie bilden eine lineare Kette mit gegenseitigem Abstand a und werden durch Federn mit der Federkonstante K gekoppelt (Abb. 1). Die Kreisfrequenz der freien Schwingung jedes Pendels – sie entspricht der Plasmafrequenz, ist gegeben durch $\omega_0^2 = g/l$ (Dabei ist $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ die Fallbeschleunigung). Mit dieser Frequenz schwingen alle Pendel (und zwar mit gleicher Phase), wenn die Koppelfedern weder gestreckt noch gestaucht werden. Interessante Experimente lassen sich mit einer Pendelkette machen, bei der sich die

Pendellänge l an einer Stelle sprunghaft ändert (oder bei der die Kette am Ende befestigt ist). Zur Anregung versetzt man das Pendel am Anfang der Kette in eine harmonische Bewegung (in Längsrichtung). Dann gibt es bei gewissen Anregungsfrequenzen Pendel, die mit großer Amplitude schwingen. Solche Resonanzen wollen wir untersuchen. Zum Experiment später, zunächst etwas Theorie.

2. Theorie

Wir denken uns die Pendel in x -Richtung aufgereiht. Setzt man voraus, dass sich die Schwingungszustände benachbarter Pendel nur wenig voneinander unterscheiden, erhält man als Differenzialgleichung für die Auslenkung ψ des Pendels an der Stelle x der Kette

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(x,t) + \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}.$$

Sie entspricht formal der *Klein-Gordon-Gleichung* für relativistische Spin-0-Teilchen. Das Pendel am Anfang der Kette werde durch eine periodische Kraft der Frequenz ω in Schwingungen versetzt. Wir warten, bis alle Pendel sich mit dieser Frequenz und mit gleicher Phase bewegen. Für diesen „eingeschwungenen“ Zustand lässt sich mit dem Ansatz

$$(2) \quad \psi(x,t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

die Zeitabhängigkeit abspalten. Es ist nämlich

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) A(x)$$

und

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(x)}{dx^2}.$$

Setzt man Gl. (2), (3) und (4) in Gl. (1) ein, hebt sich der Faktor $\cos(\omega t + \varphi)$ weg und man erhält für den Verlauf der Amplituden $A(x)$ der Pendel längs der Kette die Differenzialgleichung

$$(5) \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{M}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(x).$$

Die Lösung dieser Gleichung hängt nun davon ab, ob die Anregungsfrequenz ω größer oder kleiner als ω_0 ist. Für $\omega^2 > \omega_0^2$ ist die rechte Seite von Gl. (5) negativ, so dass sich eine Differenzialgleichung ergibt, die der einer harmonischen Schwingung entspricht. Mit der Abkürzung

$$(6) \quad k^2 = -\frac{M}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

ergibt sich

$$(7) \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -k^2 A(x)$$

mit den sinusförmigen Lösungen

$$(8) \quad A(x) = A \cos kx + B \sin kx.$$

Für $\omega^2 < \omega_0^2$ dagegen wird die rechte Seite der Gl. (5) positiv, so dass mit

$$(9) \quad \kappa^2 = \frac{M}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

(κ = kappa, griech.) die Differenzialgleichung

$$(10) \quad \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \kappa^2 A(x)$$

folgt. Deren Lösung sind Exponentialfunktionen, nämlich

$$(11) \quad A(x) = C \exp(-\kappa x) + D \exp(\kappa x).$$

Die Konstanten A , B , C und D ergeben sich aus den Randbedingungen. Im Fall der Exponentiallösungen Gl. (11) setzen wir eine Kette von Pendeln voraus, die bei $x = 0$ eine von Null verschiedene Amplitude $A(0)$ besitzt und sehr lang ist (Diese Situation liegt bei den meisten physikalischen Anwendungen vor). Dann ist intuitiv klar, dass die Amplituden mit wachsendem x kleiner werden und schließlich gegen Null gehen. Daraus folgt $D = 0$. Wir betrachten daher im Fall $\omega^2 < \omega_0^2$ nur Lösungen mit exponentiell abklingender Amplitude. Der Reziprokwert von κ heißt dabei Abklingkonstante oder Eindringtiefe δ .

$$(12) \quad \delta = \frac{1}{\kappa}.$$

Die beiden Arten von Lösungen, die wir für unsere Kette gekoppelter Pendel gefunden haben, erhält man auch für andere „Medien“, in denen sich Wellen ausbreiten können. Ist $\omega^2 > \omega_0^2$, bildet sich eine sinusförmige Amplitudenverteilung, im Fall $\omega^2 < \omega_0^2$ liegt exponentieller Abfall vor. Bekanntlich nennt man ein Medium im ersten Fall ($\omega^2 > \omega_0^2$) *dispersiv*, im zweiten ($\omega^2 < \omega_0^2$) *reaktiv*. Dispersive Medien sind, da sich die sinusförmigen Wellen (bei verschwindender

Dämpfung) im ganzen Gebiet des Mediums ausbreiten, transparent. In reaktiven Medien dagegen klingt die Amplitude der einfallenden Welle exponentiell ab. Sie sind daher undurchsichtig.

Ist das Medium ein Plasma, das durch elektromagnetische Strahlung angeregt wird, kann es je nach der Frequenz ω der Strahlung dispersiv oder reaktiv sein. Ein Beispiel ist die Ionosphäre. Deren Plasmafrequenz ist von der Größenordnung 9 MHz. Wird sie durch Radiowellen mit Frequenzen von etwa 1 MHz (Mittelwelle) zu erzwungenen Schwingungen angeregt, liegt der Fall $\omega^2 < \omega_0^2$ vor, so dass die Wellen in ihr exponentiell abklingen (und zum Teil reflektiert werden). Wellen im VHF- oder UHF-Bereich dagegen haben Frequenzen größer als etwa 100 MHz, also weit oberhalb der Plasmafrequenz. Daher ist für sie die Ionosphäre transparent.

Und nun zu einem der Experimente, die Crawford vorschlägt (*Home experiment 3.23*², hier leicht abgewandelt, da mit dem Experimentiermaterial einer Schul-Physiksammlung ausgeführt): Baue eine Kette von gekoppelten Fadenpendeln, bei denen sich die Frequenz ω_0 an einer Stelle der Kette sprunghaft ändert. Das heißt, gib den Pendeln im ersten Bereich der Kette die Länge l_1 und schließe unmittelbar an diese einen Bereich mit Pendeln der Länge l_2 an. Wähle $l_1 > l_2$ und damit $\omega_{02}^2 = g/l_2$ und $\omega_{01}^2 = g/l_1$ so, dass gilt $\omega_{02}^2 > \omega_{01}^2$. Schließe an den Anfang des ersten Bereichs einen Exzentermotor an, der das erste Pendel periodisch hin- und herbewegt (Abb. 2). Variiere die Umdrehungszahl des Motors – und damit die Anregungsfrequenz ω zwischen den Werten von ω_{01} und ω_{02} , und beobachte die Bewegung der Pendel in Abhängigkeit von ω . Suche nach Resonanzen – das heißt, nach Anregungsfrequenzen, bei denen die Pendel, oder zumindest einige von ihnen, in heftige Bewegung geraten.

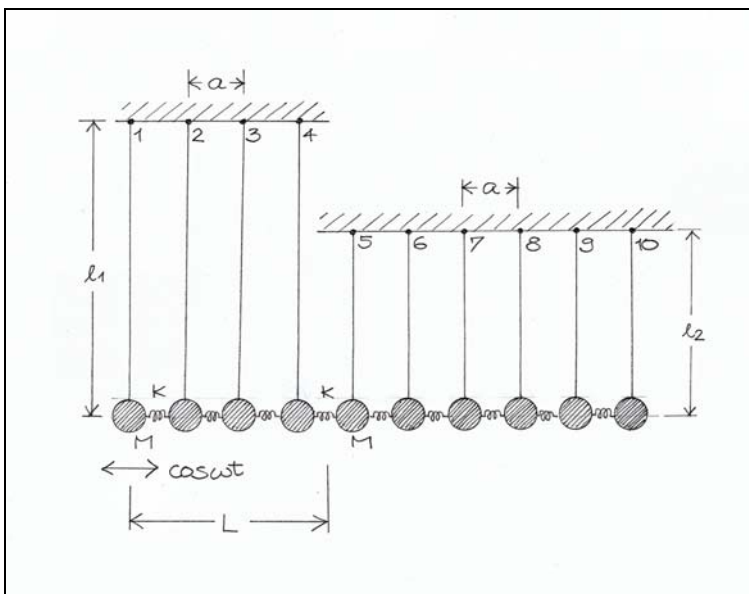


Abb. 2 Gekoppelte Pendel, nach Crawford, Berkeley Physics Course, Band III, *Waves*, Home experiment 3.23, siehe Text

Da die Anregungsfrequenz ω zwischen den Werten von ω_{01} und ω_{02} liegt, ist der Bereich mit den Pendeln der Länge l_1 (mit Frequenz ω_{01}) dispersiv, der Bereich mit den Pendeln der Längen l_2 (mit ω_{02}) reaktiv. Die Resonanzfrequenzen ergeben sich aus der Forderung, dass die Lösungen von Gl. (5) an der Grenze zwischen dispersivem und reaktivem Bereich (1) stetig und (2) mit gleicher Steigung ineinander übergehen. Um mit übersichtlichen Koordinaten zu rechnen, lassen wir unsere Kette bei $x = 0$ beginnen (das ist die Position des Pendels Nummer 1, an dem der Motor angreift) und bezeichnen die Stelle, an der die Pendel mit der Länge l_1 in die mit l_2 übergehen, mit $x = L$. Dann gilt für 0

$< x < L$ Lösung Gl. (8), für $x > L$ Lösung Gl. (11) der Differentialgleichung Gl. (5). Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass Pendel Nr. 1 mit vernachlässigbar kleiner Amplitude angetrieben wird. Das heißt, die Amplitude an der Stelle $x = 0$ ist Null. Das führt zu $B = 0$ in Gl. (8). In der Lösung Gl. (11) setzen wir, wie schon erwähnt, $D = 0$, damit die Amplituden für große x gegen Null gehen. Stetigkeit und Differenzierbarkeit der beiden Lösungen an der Stelle $x = L$ erfordert dann

$$\begin{aligned} A \sin kL &= C \exp(-\kappa L) \\ kA \cos kL &= -\kappa C \exp(-\kappa L) \end{aligned}$$

Division beider Gleichungen durch einander und Multiplikation mit L ergibt

$$(13) \quad kL \cot(kL) = -\kappa L .$$

Aus Gln. (6) und (9) folgt außerdem, auch hier nach Multiplikation mit L ,

$$(14) \quad (\kappa L)^2 + (\kappa L)^2 = \frac{ML^2}{ka^2} \left(\frac{g}{l_2} - \frac{g}{l_1} \right).$$

Mit den Abkürzungen

$$(15) \quad \kappa L = x, \quad \kappa L = y \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{ML^2}{ka^2} \left(\frac{g}{l_2} - \frac{g}{l_1} \right)$$

erhalten wir das Gleichungssystem

$$(16) \quad \begin{aligned} -x \cot x &= y \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

aus dessen Lösungen (x, y) sich die Resonanzfrequenzen ω_n und die Eindringtiefe δ ergeben. Geometrisch ergeben sich die Lösungen als Schnittpunkte des Graphen $y = -x \cot x$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ (Abb. 3).

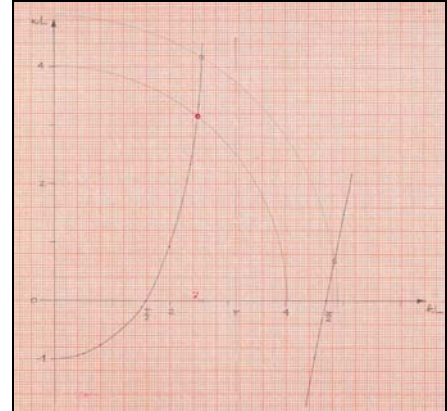


Abb. 3 Lösungen von Gl. (16) als Schnittpunkte des Graphen $y = -x \cot x$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$.

3. Experiment

Ein Foto des Versuchsaufbaus existiert leider nicht mehr, wohl aber die entsprechenden Einträge in meinem Protokollbuch. Abbildung 4, eine Seite aus diesem Protokollbuch, zeigt beispielsweise die Amplituden für eine Kette aus 10 Pendeln, gemessen in Abhängigkeit von der Umlaufzeit T des Exzentermotors. Die Kette bestand aus 4 Pendeln der Länge $l_1 = 0,56$ cm, an die sich 6 Pendel mit $l_2 = 0,34$ cm anschlossen. Die zugehörigen Pendelfrequenzen sind $\omega_{01} = 4,20 \text{ s}^{-1}$ bzw. $\omega_{02} = 5,38 \text{ s}^{-1}$.

Die Werte der übrigen Größen, die in die Resonanzfrequenz eingehen, waren $M = 0,42 \text{ kg}$, $a = 0,12 \text{ m}$, $L = 0,42 \text{ m}$ und $K = 3,6 \text{ N/m}$.

Aus der Tabelle in Abb. 4 entnimmt man, dass bei $T = 1,35 \text{ s}$, entsprechend einer Kreisfrequenz $\omega = 4,65 \text{ s}^{-1}$, eine Resonanz vorliegt. Bei dieser Anregungsfrequenz sind die Amplituden der Pendel mit den Nummern 2, 3 und 4 deutlich größer als bei anderen Frequenzen. Als Maß für die Energie, die in dem System der schwingenden Pendel steckt, kann man die Summe der Amplitudenquadrate aller Pendel betrachten. Trägt man diese als Funktion der Frequenz ω auf, erhält man die Resonanzkurve in Abb. 5.

10. JUNI 1979
GEKOPPELTE PENDEL, FORIS

Gleicher Versuchsaufbau wie am
jederen Masse #1 mit Stangen Distanz
(Kleinstmaß) mit Gelenk des Motors
verbunden.
Es scheint so, als ob die Schwingungen
weniger stark bzw. verschwinden sind!

$2A_i^2$	$\frac{T}{s}$	Amplituden/cm																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10									
53	4,83	2	1	<0,5																
53	2,43 ± 0,02	2	1	<0,5																
53	2,01	2	1	~0,5																
75	1,74	2	1,5	1	~0,5	<0,5														
136	1,61 ± 0,02	2	2	1,75	1,5	~0,5														
24	1,62 ± 0,02	2	3	2,5	2	0,5														
29	1,45	2	3	3	2,5	0,75	0,5													
587	1,35 ± 0,02	2	11	18	11	4	0,75	<0,5												
297	1,34	2	6	11	10	3														
74	1,25	2	4	5	4,5	2,5														
293+3	1,20	2	3	<0,5	3	1,5														
	1,20	2	0	2	3	2	1	<0,5												
	1,14	2	9	3,5	8	5	6,5	6	6	6	6									
	1,05	2	2	2	1	1	1	2	...											
	0,96	2	4	3	~0,5	2	<0,5	2	<0,5											

Abb. 4 Amplituden gekoppelter Pendel, die zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Pendel Nr. 1, 2, 3 und 4 haben die Länge $l_1 = 0,56$ cm, die restlichen Pendel die Länge $l_2 = 0,34$ cm. Bei der Schwingungsdauer $T = 1,35 \text{ s}$ schwingen Pendel Nr. 2, 3 und 4 mit großer Amplitude (Resonanz).

Nach Gl. (15) folgt aus den für M , a , usw. genannten Werten $r^2 = 4,02^2$. Die Lösung des Gleichungssystems Gl. (16) ergibt $x = 2,478$ und $y = 3,165$. Daraus folgt nach Gl. (6) für die Resonanzfrequenz

$$\omega^2 = x^2 \cdot \frac{Ka^2}{ML^2} + \omega_{01}^2 = (2,478^2 \cdot \frac{3,6 \cdot 0,12^2}{0,42 \cdot 0,42^2} + 4,20^2) \frac{1}{s^2} = 4,68^2 \frac{1}{s^2} .$$

Dem entspricht eine Umlaufzeit $T = 1,34$ s, in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert 1,35 s.

Aus Abb. 3 geht hervor, dass es mehr als eine Lösung der Gln. (16) gibt, wenn der Radius r des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ größer als $3\pi/2$ ist und der Kreis somit die Kotangens-Kurve im ersten

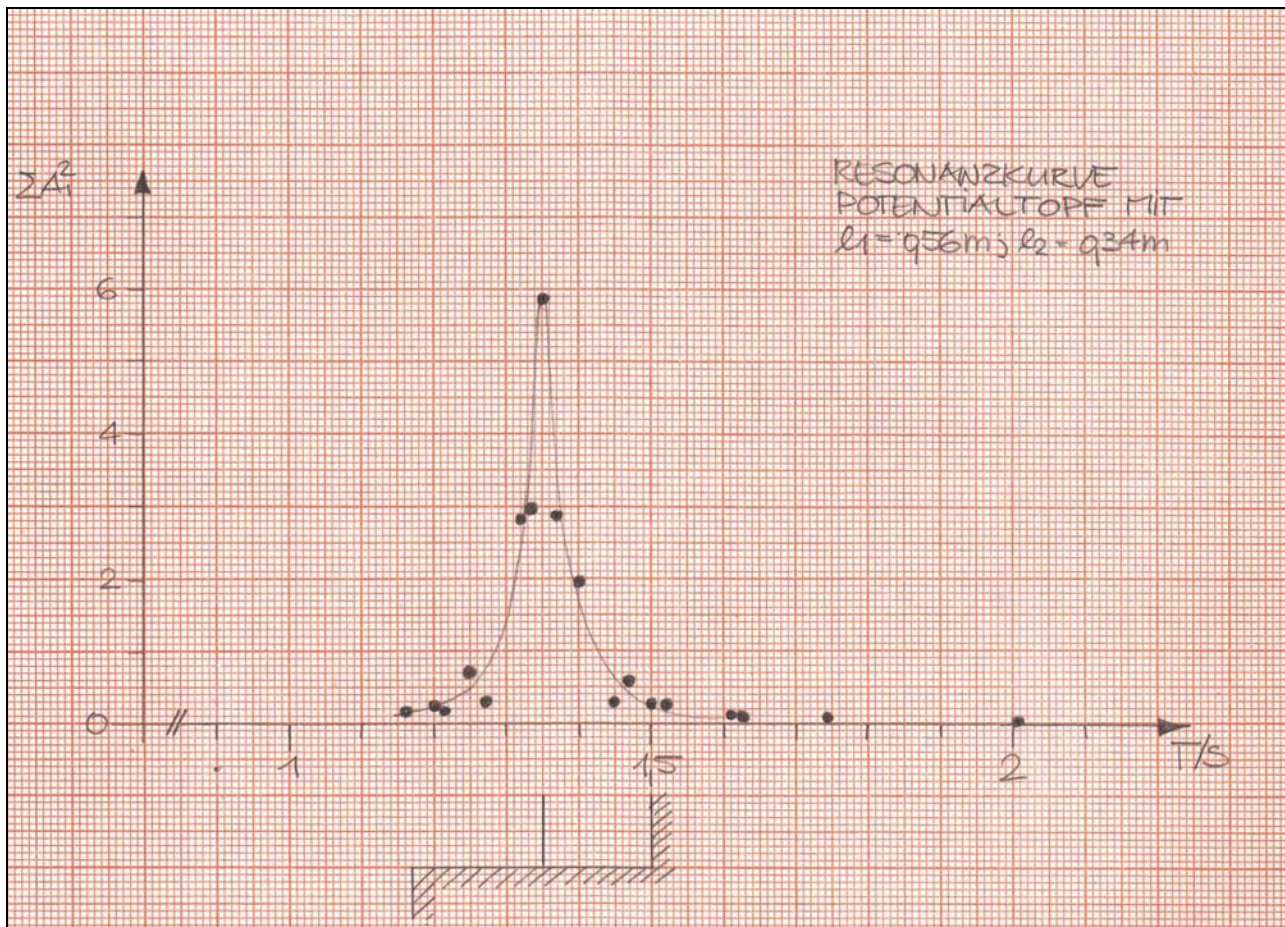


Abb. 5 Summe der Amplitudenquadrate der Pendel in Abb. 4 (dort am linken Rand vermerkt). Für $T = 1,35$ s ist diese maximal. Zusammen mit den Werten für die benachbarten Schwingungsdauern ergibt sich eine Resonanzkurve.

Quadranten ($kL > 0$, $\kappa L > 0$) mehrmals schneidet. Das ist beispielsweise der Fall, wenn l_1 bei sonst gleichen Werten für die übrigen Parameter größer ist als etwa 0,63 m. Als praktikable Größe erschien der Wert $l_1 = 0,81$ m, die zugehörige Pendelfrequenz ist $\omega_{01} = 3,48$ s⁻¹.

Das Ergebnis des Experiments zeigt Abb. 6. Es sind (in der linken Hälfte) zwei Resonanzen sichtbar mit den Frequenzen $\omega_1 = 4,05$ s⁻¹ bzw. $\omega_2 = 5,00$ s⁻¹. Theoretisch erwartet man 4,07 s⁻¹ bzw. 5,34 s⁻¹. In der rechten Hälfte dieser Abbildung ist der dispersive Bereich der Pendelkette ($\omega_{01} = 3,48$ s⁻¹) als „Potentialtopf“ der Breite $L = 0,42$ m eingezeichnet, in dem die beiden Resonanzfrequenzen (ω_1 bzw. ω_2) als „Energieniveaus“ angedeutet wurden. Die Amplituden und

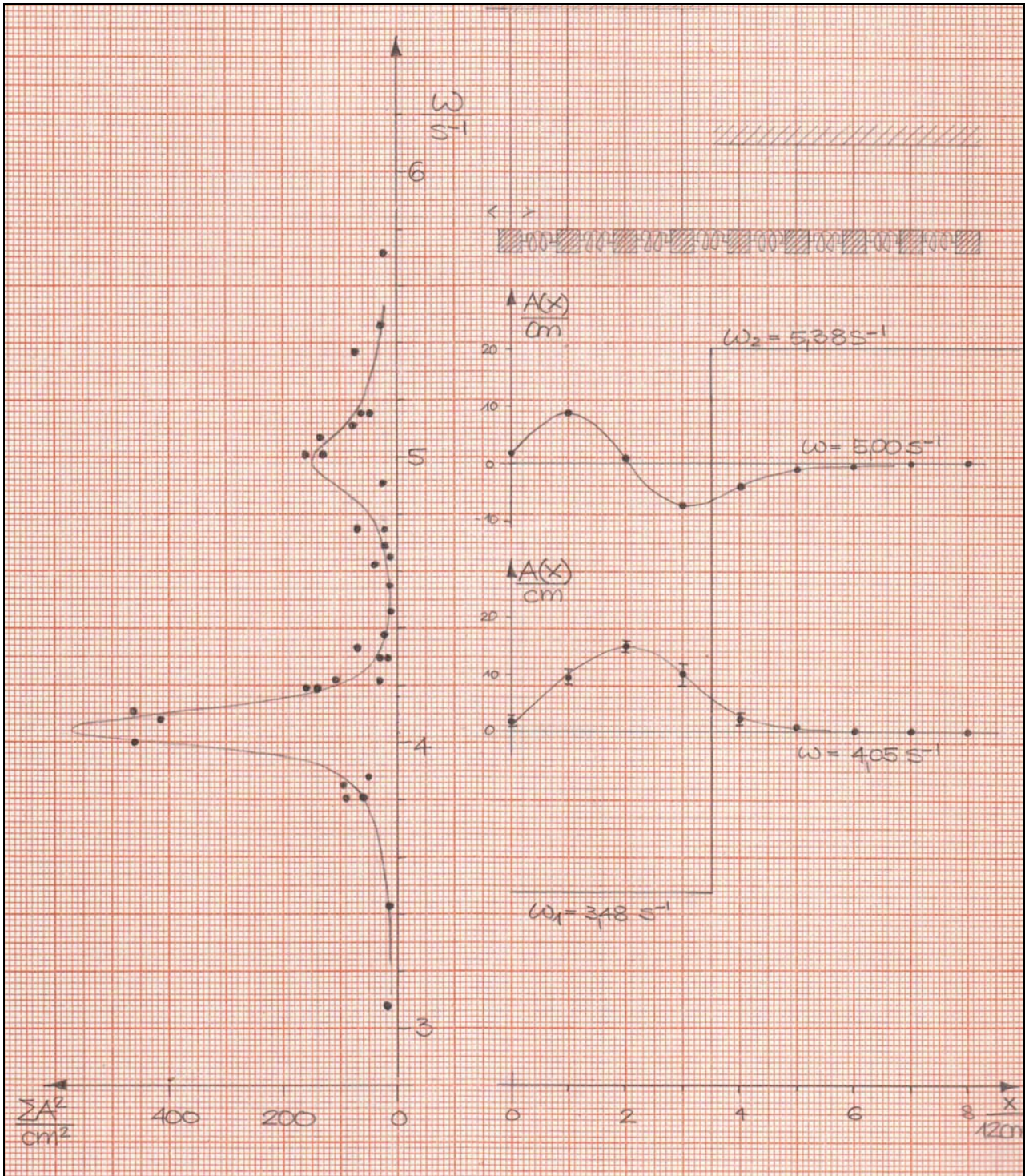


Abb. 6 Resonanzen in einer Kette gekoppelter Pendel. Im Gegensatz zur Kette der Abb. 4 und 5 ist die Pendelfrequenz im dispersiven Bereich kleiner: Pendel Nr. 1 bis 4 haben die Länge $l_1 = 0,81 \text{ m}$ ($\omega_{01} = 3,48 \text{ s}^{-1}$), Pendel 5 bis 10 wie bisher die Länge $l_2 = 0,34 \text{ m}$ ($\omega_{02} = 5,38 \text{ s}^{-1}$). Es gibt zwei Resonanzen, da der „Potenzialtopf“ tiefer ist – und zwar bei $\omega_1 = 4,05 \text{ s}^{-1}$ und $\omega_2 = 5,00 \text{ s}^{-1}$

relativen Phasen der Pendel für die beiden Resonanzfrequenzen konnten grob gemessen werden und sind ebenfalls eingezeichnet. Sie zeigen qualitativ den richtigen Verlauf, der exponentielle Abfall im reaktiven Bereich $x > L$ ist ebenfalls sichtbar.

Der Begriff „Potenzialtopf“ drängt sich auf, da die Radialkomponente der Wellenfunktion eines Teilchens in einem Kastenpotenzial derselben Differentialgleichung genügt wie unsere Amplitude $A(x)$, nämlich Gl. (5). Daher hat sie auch dieselben Lösungen wie diese³.

Als Eindringtiefen δ liest man aus den Amplitudenverteilungen etwa eine bzw. zwei Pendelabstände a ab, also 0,12 m bzw. 0,24 m. Die theoretischen Werte (abgelesen aus Abb. 4) sind $\kappa_1 L = 4,16$ (für $\omega_1 = 4,07 \text{ s}^{-1}$) und $\kappa_2 L = 0,68$ (für $\omega_2 = 5,34 \text{ s}^{-1}$). Daraus folgen als Eindringtiefen $\delta_1 = 0,10 \text{ m}$ bzw. $\delta_2 = 0,62 \text{ m}$. Von diesen Werten ist der erste in etwa mit dem experimentellen Ergebnis verträglich.

Abschließend betrachtet, ist das Experiment aus mehreren Gründen interessant: (1) ist es ein Modell für das Verhalten elektromagnetischer Wellen in einem Plasma, (2) zeigt es, was die Resonanzfrequenzen betrifft, erstaunlich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment – trotz des einfachen Aufbaus, und (3) demonstriert es, dass die Modellierung unterschiedlicher physikalischer Sachverhalte bisweilen zu den gleichen mathematischen (Differenzial-)Gleichungen führt.

Literatur

¹ J. S. Crawford: Berkeley Physics Course, Volume III (Waves), New York: McGraw-Hill, 1965

² Crawford, a.a.O., Seite 150

³ siehe z. B. T. Mayer-Kuckuk: Physik der Atomkerne, Stuttgart: Teubner, 1970, Seite 129