

1. Erdmagnetfeld und Kugelfunktionen ...

Daniel Kehlmann beschreibt die Szene in seinem Buch „Die Vermessung der Welt“ mit hintergründigem Humor¹: Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß unterhalten sich über das Magnetfeld der Erde. Humboldt brüstet sich damit, mehr als zehntausend Messungen des Feldes gemacht zu haben. Gauß entgegnet cool, Daten heranschleppen reiche nicht, man müsse auch denken – und lässt „leise lachend“ die Bemerkung fallen: „Einfache Kugelfunktionen“. Weiter heißt es dann: „Kugelfunktionen. Humboldt lächelte. Er hatte kein Wort verstanden.“

Ich lese es und denke nicht ohne Stolz: Das Physikstudium hat sich gelohnt, für dich sind Kugelfunktionen kein Problem. Dass Gauß der erste war, der Kugelfunktionen benutzte, um das Erdmagnetfeld zu modellieren, wusste ich allerdings nicht. Grund genug, der Sache nachzugehen: Sie begann offenbar mit einer Arbeit², die den Titel trägt *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*. Das heißt, Gauß muss sich dem Thema Erdmagnetismus einige Jahre zuvor zugewendet haben. Die von ihm benutzten mathematischen Methoden werden auch heute noch angewandt. Einen Überblick über die Beiträge, die Gauß zum Geomagnetismus machte und die seine Nachfolger weiter entwickelten, liefert G. B. Garland³. Wer dort nachschaut, ist informiert. Im Folgenden mein eigener Versuch, Kugelfunktionen und Erdmagnetfeld miteinander zu verknüpfen.

2. Magnetisches Potenzial

Es geht, salopp gesprochen, um einen mathematischen Ausdruck (eine Formel) für die magnetische Feldstärke im Gebiet außerhalb der Erde. In diesem Ausdruck muss es geeignete, zunächst unbekannte Größen geben, genannt Parameter, die erst im Nachhinein bestimmt werden – nämlich so, dass sie die Messwerte (zum Beispiel die von Humboldt) richtig wiedergeben. Die Frage ist, wie man zu einem solchen Ausdruck gelangt.

Wir starten, wie immer in der Elektrodynamik, bei den *Maxwell'schen Gleichungen*. Zunächst wird vorausgesetzt, dass es im Gebiet außerhalb der Erde keine Leitungsströme und zeitlich veränderliche elektrische Felder gibt – das ist zumindest bis zur Höhe der Ionosphäre, also bis zu einer Höhe von etwa 80 km über der Erdoberfläche, der Fall. Infolge dessen ist dort nach Maxwell die Rotation der magnetischen Feldstärke \mathbf{B} gleich Null:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = 0.$$

Daraus folgt, dass \mathbf{B} als Gradient eines skalaren Potentials V geschrieben werden kann⁴. Denn die Rotation des Gradienten eines Skalars ist Null. Also gilt

$$(2) \quad \mathbf{B} = -\vec{\nabla}V.$$

Da es keine magnetischen Ladungen (Monopole) gibt, sind magnetische Feldlinien immer geschlossen. Das heißt, auch die Divergenz von \mathbf{B} verschwindet. Also gilt darüber hinaus

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Daraus folgt, indem man \mathbf{B} aus (2) einsetzt, dass V der Laplace-Gleichung

$$(4) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = \nabla^2 V = 0$$

genügen muss. Dabei ist ∇^2 der Laplace-Operator. Da wir das Magnetfeld in der Nähe der Erde betrachten, ist es sinnvoll, sich deren Symmetrie anzupassen und den Laplace-Operator in

Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) anzugeben. Zu beachten ist, dass in diesem Koordinatensystem r zwar der Abstand vom Erdmittelpunkt bedeutet, der Winkel θ (Polarwinkel) aber von einer Achse aus gezählt wird, die durch die Form des Magnetfeldes gegeben ist. Die Entwicklung des Feldes nach Kugelfunktionen ergibt (siehe unten), dass dessen Dipolanteil bei Weitem überwiegt. Der Polarwinkel θ wird von der Achse dieses Dipols aus gezählt, das Azimut ϕ , wie üblich, senkrecht zur Richtung von θ . Man kann daher θ als magnetische Komplementär-Breite ($90^\circ -$ magnetische Breite) und ϕ als magnetische Länge bezeichnen. Beachte: Dieses durch (r, θ, ϕ) gegebene System ist ein System *magnetischer* Koordinaten. Es sollte nicht verwechselt werden mit dem System der *geografischen* Längen- und Breitengrade, das weiter unten auch verwendet wird.

In unserem magnetischen, durch (r, θ, ϕ) gegebenen System gilt also

$$(5) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit r^2 und fassen die von θ und ϕ abhängigen Summanden zum Operator

$$(6) \quad \nabla_{\theta\phi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

zusammen:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \nabla_{\theta\phi}^2 V = 0 .$$

Unser Lösungsansatz ist

$$(8) \quad V(r, \theta, \phi) = Q(r) P(\theta, \phi) ,$$

das heißt, wir separieren in zwei Funktionen, $Q(r)$ für den radialen und $P(\theta, \phi)$ für den winkelabhängigen Teil von V . Setzen wir diesen Ansatz in (7) ein, folgt

$$(9) \quad \begin{aligned} P(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Q(r)}{\partial r} \right) + Q(r) \nabla_{\theta\phi}^2 P(\theta, \phi) &= 0 \\ \frac{1}{Q(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Q(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{P(\theta, \phi)} \nabla_{\theta\phi}^2 P(\theta, \phi) &= 0 \end{aligned}$$

Der Trick ist, die Eigenfunktionen der Differentialoperatoren zu finden. Im Fall von $\nabla_{\theta\phi}^2$ sind das die schon erwähnten Kugelfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ mit den Eigenwerten $-l(l+1)$. Also gilt

$$(10) \quad \nabla_{\theta\phi}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) .$$

Wir ersetzen deshalb $P(\theta, \phi)$ durch $Y_l^m(\theta, \phi)$ und erhalten aus (9)

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Q(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Q(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y_l^m(\theta, \phi)} \nabla_{\theta\phi}^2 Y_l^m(\theta, \phi) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Q(r)}{\partial r} \right) - l(l+1) Q(r) &= 0 \end{aligned}$$

Der Ansatz $Q(r) = r^n$ führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (n r^{n-1}) - l(l+1)r^n &= 0 \\ (12) \quad n [2r(r^{n-1}) + r^2(n-1)r^{n-2}] - l(l+1)r^n &= 0 \\ n [2 + (n-1)] - l(l+1) &= 0 \\ n(n+1) - l(l+1) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $n = l$ oder $n = -(l+1)$. Also gibt es zwei Lösungen

$$(13) \quad \begin{aligned} Q_l(r) &= r^{-(l+1)} \\ Q_l(r) &= r^l \end{aligned}$$

Die Lösung proportional zu $1/r^{l+1}$ ist eine Funktion, die mit wachsender Entfernung r vom Erdmittelpunkt abnimmt. Sie wird durch Quellen im Innern der Erde hervorgerufen. Die Lösung r^l nimmt mit größer werdendem r zu und wird externen Quellen zugeschrieben. Um zu handlichen Einheiten zu gelangen, bezieht man die Entfernungen r auf den Erdradius a (6371,2 km) und fügt noch ein weiteres a als Faktor hinzu. Das heißt, man multipliziert die erste Lösung mit a^{l+2} und die zweite Lösung mit a^{1-l} . Damit werden die Lösungen der Laplace-Gleichung

$$(14) \quad \begin{aligned} V_l^m(r, \theta, \phi) &= a \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} Y_l^m(\theta, \phi) \\ V_l^m(r, \theta, \phi) &= a \left(\frac{r}{a} \right)^l Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned}$$

und das Potential des Erdmagnetfeldes ist damit darstellbar als

$$(15) \quad V(r, \theta, \phi) = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[G_l^m \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} + K_l^m \left(\frac{r}{a} \right)^l \right] Y_l^m(\theta, \phi)$$

Die Koeffizienten G_l^m und K_l^m sind die oben erwähnten Parameter, die man durch Anpassung an die Messwerte des Feldes erhält.

Die Anpassung ergibt im Übrigen, dass der Term proportional zu r^l vernachlässigbar klein ist. Externe Quellen des Feldes können daher so gut wie ausgeschlossen werden. Man geht deshalb in der Praxis von einem Feld aus, das durch Quellen im Innern der Erde hervorgerufen wird und benutzt eine Reihenentwicklung, die nur den Term proportional zu $1/r^{l+1}$ enthält. Mehr dazu weiter unten.

Der Vektor des Magnetfeldes folgt aus (2). Dazu bilden wir den Gradienten in Kugelkoordinaten:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= -\vec{\nabla} V \\ \mathbf{B} &= - \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

Die Komponenten von \mathbf{B} werden damit zu

$$\begin{aligned}
 B_r(r, \theta, \phi) &= -\frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta, \phi) \\
 (17) \quad B_\theta(r, \theta, \phi) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(r, \theta, \phi) \\
 B_\phi(r, \theta, \phi) &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V(r, \theta, \phi)
 \end{aligned}$$

Sie sind nicht ohne Weiteres identisch mit den Feldgrößen X , Y und Z , die als Messwerte der Magnetfeldstärke von den Beobachtungsstationen protokolliert werden. Wie Abbildung 1 zeigt, handelt es sich dabei um die Komponenten der Feldstärke entlang der Längen- und Breitenkreise (Himmelsrichtungen) auf der Erdoberfläche und der dazu senkrechten, nach unten zeigenden Richtung: X ist die Komponente in Nord-Süd-Richtung, Y die in West-Ost-Richtung und Z die nach

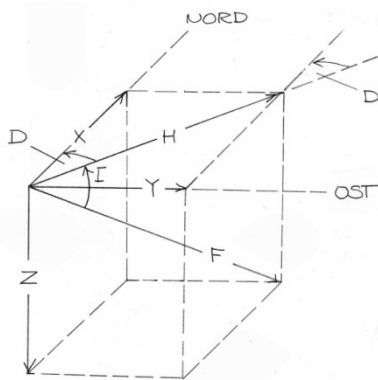


Abbildung 1 Rechtwinklige Komponenten X , Y und Z des Erdmagnetfeldes. Die magnetischen Feldlinien zeigen in Richtung der Totalintensität F . Die Horizontalintensität H ist, wie der Name sagt, deren horizontale Komponente. Der Winkel zwischen der Nordrichtung und H heißt Deklination D , der Winkel zwischen der Horizontalen und Z ist die Inklination I .

unten positiv gezählte Vertikalintensität. Angegeben werden in der Regel auch die Horizontalintensität H und die Totalintensität F . Dabei ist H die „Resultierende“ aus X und Y und F die „Resultierende“ aus H und Z . Der Winkel zwischen der Nordrichtung und H ist, wie aus Erdkunde-Unterricht und Pfadfinderpraxis bekannt, die Deklination D („Missweisung“ des Magnetkompasses), und der Winkel zwischen Horizontalkomponente H und Totalintensität F die Inklination I . Erdkarten mit den Linien gleicher Deklination oder gleicher Inklination werden seit der Zeit von Gauß und Humboldt laufend aktualisiert und veröffentlicht.

Die Beziehungen zwischen den Feldgrößen X , Y , Z , H und F und den Komponenten von \mathbf{B} sollen hier nicht im Einzelnen diskutiert werden. Unmittelbar einsichtig sind

$$\begin{aligned}
 (18) \quad H(r, \theta, \phi) &= -B_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(r, \theta, \phi) \\
 Z(r, \theta, \phi) &= -B_r(r, \theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta, \phi)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt beispielsweise die Gleichung

$$(19) \quad \tan I = \frac{Z}{H} = \frac{B_r}{B_\theta},$$

die weiter unten noch benutzt wird.

3. Kugelfunktionen

Wir wenden uns jetzt dem „Innenleben“ der Kugelfunktionen zu. Sie genügen, wie oben beschrieben, Gleichung (10). Diese partielle Differentialgleichung lautet, wenn man den Operator $\nabla_{\theta\phi}^2$ ausschreibt,

$$(18) \quad \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\left[l(l+1) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = 0$$

Die Abhängigkeit von den beiden Koordinaten θ und ϕ verleitet dazu, auch hier einen Separationsansatz zu machen. Wir schreiben daher

$$(19) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = f(\theta)g(\phi),$$

und setzen das in (18) ein, nachdem wir beide Seiten mit $\sin^2 \theta / Y_l^m(\theta, \phi)$ multipliziert haben:

$$(20) \quad l(l+1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{f(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}) + \frac{1}{g(\phi)} \frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial \phi^2} = 0.$$

Die ersten beiden Terme sind von ϕ unabhängig, so dass der dritte von ϕ abhängige Term eine Konstante ist. Es ist sinnvoll, sie $-m^2$ zu nennen. Dann gilt

$$(21) \quad \frac{1}{g(\phi)} \frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2$$

$$\frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 g(\phi) = 0$$

Das ist die bekannte Differentialgleichung der harmonischen Schwingung mit der allgemeinen Lösung

$$(22) \quad g(\phi) = \alpha \cos(m\phi) + \beta \sin(m\phi).$$

Für den von θ abhängigen Teil $f(\theta)$ folgt schließlich

$$(23) \quad l(l+1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{f(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}) - m^2 = 0$$

oder, nachdem man beide Seiten mit $f(\theta)/\sin^2 \theta$ multipliziert hat,

$$(24) \quad l(l+1) f(\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}) - m^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} f(\theta) = 0.$$

Diese Gleichung wird mit Hilfe von

$$(25) \quad x := \cos \theta, \quad dx := -\sin \theta d\theta, \quad \sin^2 \theta = (1 - x^2)$$

umgeformt in

$$(26) \quad \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] f(x) + \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{df(x)}{dx} \right] = 0 .$$

Das ist die verallgemeinerte Legendre'sche Differentialgleichung. Die Lösungen sind die *zugeordneten* Legendre-Polynome $P_l^m(\cos \theta)$, deren Darstellung man beispielsweise dem Tafelwerk von Abramowitz und Stegun⁴ entnimmt:

$$(27) \quad f(x) = P_l^m(x) = P_l^m(\cos \theta) .$$

Für $m = 0$ geht (24) in die (gewöhnliche) Legendre-Gleichung über, deren Lösungen die gewöhnlichen Legendre'schen Polynome $P_l = P_l^0$ sind. Die zugeordneten Legendre-Polynome lassen sich als Ableitungen der gewöhnlichen Legendre-Polynome definieren:

$$(28) \quad P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) .$$

Dabei ist $P_l(x)$ das l -te Legendre-Polynom

$$(29) \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l .$$

Für die zugeordneten Legendre-Polynome gilt folgende Rekursionsformel

$$(30) \quad (l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x).$$

In unserem Fall ist $x = \cos \theta$. Die ersten Legendre-Polynome, ausgedrückt mit diesem Argument, sind

$$(31) \quad \begin{aligned} P_0^0(\cos \theta) &= P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1^0(\cos \theta) &= P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_1^1(\cos \theta) &= -\sin \theta \\ P_2^0(\cos \theta) &= P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \\ P_2^1(\cos \theta) &= -3\sin \theta \cos \theta \\ P_2^2(\cos \theta) &= -3\sin^2 \theta \\ P_3^0(\cos \theta) &= P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \end{aligned} .$$

Schließlich erhält man damit für die Kugelfunktionen die Darstellung

$$(32) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = f(\theta) g(\phi) = [\alpha \cos(m\phi) + \beta \sin(m\phi)] P_l^m(\cos \theta) .$$

Es ist möglich, dass die rechte Seite noch durch einen Normierungsfaktor zu ergänzen ist, der vom „Einsatzgebiet“ der Kugelfunktionen abhängt.

4. International Geomagnetic Reference Field⁵ (IGRF)

Wie schon erwähnt, ist der Beitrag externer Quellen zum Erdmagnetfeld klein. Deshalb benutzt man in der Praxis für das Potenzial V eine Reihenentwicklung, die nur die Quellen im Innern der Erde berücksichtigt. Das heißt, der Radialteil enthält diejenige Lösung von (11), die proportional zu $1/r^{l+1}$ ist. Man gelangt so zu der in der Literatur üblichen Darstellung

$$(33) \quad V(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left[g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi) \right] P_l^m(\cos\theta) .$$

Man erkennt unschwer, dass die Entwicklungskoeffizienten (*Gauß-Koeffizienten*) jetzt g_n^m und h_n^m heißen und die Summationen gegenüber (15) geändert wurden: die äußere Summe (hier über n statt l) bricht bei einem Index N ab, und die innere Summe geht nur über nichtnegative Werte von m . Zudem werden die zugeordneten Legendre-Polynome $P_l^m(\cos\theta)$ in der sogenannten Semi-Schmidt-Normierung verwendet. Auf Details soll hier nicht eingegangen werden. Die Entwicklung (33) ist die Darstellung, die dem *International Geomagnetic Reference Field (IGRF)* zugrunde liegt.

5. Dipolfeld

Die Anpassung der Parameter des *IGRF* an die Messwerte zeigt, dass der Dipolanteil des Magnetfeldes ($n = 1$) bei Weitem überwiegt. Deshalb jetzt einige Überlegungen zum „reinen“ Dipolfeld. Dabei beschränken wir uns auf den achsensymmetrischen, also vom Azimut ϕ unabhängigen Teil mit $m = 0$. Die Doppelsumme in (33) schrumpft dann auf nur einen Term zusammen. Da $\cos(m\phi) = \cos 0^\circ = 1$ und $P_l^0(\cos\theta) = \cos\theta$, folgt

$$(34) \quad V_{Dipol}(r, \theta) = a g_1^0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\theta .$$

Daraus ergeben sich nach (17) die Komponenten des Dipolfeldes zu

$$(35) \quad \begin{aligned} B_\theta &= -H(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V(r, \theta) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 g_1^0 \sin\theta \\ B_\phi &= -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V(r, \theta) = 0 \\ B_r &= -Z(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} V(r, \theta) = 2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 g_1^0 \cos\theta \end{aligned} .$$

Als Vektor geschrieben, ist das Feld also gegeben durch

$$(36) \quad \mathbf{B}_{Dipol}(\mathbf{r}) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 g_1^0 [2 \cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta] .$$

Diese Schreibweise erleichtert es, den Ausdruck für \mathbf{B} mit dem zu vergleichen, der in den Lehrbüchern der Elektrodynamik⁶ diskutiert wird. Dort geht man in der Regel aus vom Vektorpotenzial einer Stromschleife mit einem (magnetischen) Dipolmoment \mathbf{m} . Ist die Schleife eben, kann man \mathbf{m} als Produkt aus dem Schleifenstrom I_a und dem Flächenvektor \mathbf{a} schreiben:

$$(37) \quad \mathbf{m} = I_a \mathbf{a}$$

Dabei ist die Richtung von \mathbf{a} (und damit auch die von \mathbf{m}) durch die Rechte-Hand-Regel gegeben: Krümmt man die Finger in Stromrichtung, gibt der abgespreizte Daumen die Richtung von \mathbf{m} an. Zeigt \mathbf{m} in z -Richtung ($\mathbf{m} = m \cdot \mathbf{e}_z$), ist das Vektorpotenzial der Stromschleife⁵

$$(38) \quad \mathbf{A}_{Dipol} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^2} \mathbf{e}_\phi .$$

Daraus folgt mit

$$(39) \quad \mathbf{B}_{Dipol}(\mathbf{r}) = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}_{Dipol}$$

das Feld

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}_{Dipol}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\sin \theta}{r^2} \right) \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sin \theta}{r^2} \right) \right] \mathbf{e}_\theta \right\} \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{1}{r^2} 2 \sin \theta \cos \theta \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[-(-1) \left(\frac{\sin \theta}{r^2} \right) \right] \mathbf{e}_\theta \right\} \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (36) ergibt

$$(41) \quad \frac{\mu_0 m}{4\pi} = a^3 g_0^1 \quad \text{oder} \quad m = \frac{4\pi a^3}{\mu_0} g_0^1.$$

Der Koeffizient g_0^1 ist in etwa 30000 nT ($1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ Tesla}$). Mit $a = 6371 \text{ km}$ (Erdradius) und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ folgt dann für das magnetische Dipolmoment der Erde $m \cong 7,6 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$. Daraus folgt eine Magnetisierung $m/(4\pi a^3/3) = 74,8 \text{ A/m}$, weniger als 10^{-4} der Sättigungsmagnetisierung von Eisen ($1,74 \cdot 10^6 \text{ A/m}$). Schwach magnetisiertes Eisen im Innern der Erde könnte daher die Ursache für den Geomagnetismus sein. Dagegen spricht jedoch, dass die Erdtemperatur schon in geringen Tiefen den Curie-Punkt überschreitet und die Magnetisierung zunichtemacht. Heutzutage geht man davon aus, dass das Erdmagnetfeld durch Selbsterregung nach dem Dynamoprinzip erzeugt wird.

Die Symmetrie des Dipolfeldes ermöglicht es, aus den Messwerten von Deklination und Inklination an einem bekannten Ort der Erdoberfläche die Lage des geomagnetischen Pols durch eine einfache trigonometrische Rechnung zu bestimmen. Davon wird beispielsweise bei Untersuchungen zum Paläomagnetismus Gebrauch gemacht. Es gibt Gesteinsproben aus erdgeschichtlicher Zeit, in denen die Richtung des Erdmagnetfelds „eingefroren“ ist. Aus Deklination und Inklination der Magnetisierung dieser Proben errechnet man die Position des geomagnetischen Pols. Durch Untersuchung an Proben verschiedener Perioden verfolgt man dessen Wanderung im Verlauf der Erdgeschichte.

Abbildung 2 zeigt, wie die Polposition P aus der Richtung des Magnetfeldes an einen gegebenen Ort S auf der Erdoberfläche berechnet wird. Dazu wird das *geografische*, durch Breiten- und Längengrade definierte Koordinatensystem benutzt. Die Koordinaten geben wir in der Reihenfolge (geogr. Breite, geogr. Länge) = (λ, ϕ) an. Wir bezeichnen die Position des geomagnetischen Pols P mit (λ_P, ϕ_P) , und die des Ortes S , an dem Deklination D und Inklination I gegeben sind, mit (λ_S, ϕ_S) .

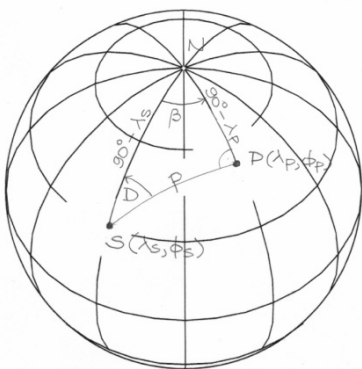


Abbildung 2 Sphärisches Dreieck SPN zur Bestimmung der Position des magnetischen Pols P, siehe Text

Dabei ist zu beachten: Der geomagnetische Pol ist definiert als der Punkt, an dem die Achse des Dipols \mathbf{m} , den man sich im Erdmittelpunkt fixiert denkt, durch die Erdoberfläche stößt. Diese Achse ist die z -Achse unseres *magnetischen* Koordinatensystems, nämlich das der anfangs eingeführten Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) . Das heißt, von dieser Achse aus wird unser magnetischer Polarwinkel θ gemessen.

Im ersten Schritt betrachten wir den Großkreisabstand p des Ortes (λ_S, ϕ_S) vom geomagnetischen Pol (λ_P, ϕ_P) . Er ist gleich dem magnetischen Polarwinkel θ . Gesucht wird der Zusammenhang zwischen p und der Inklination I . Zunächst greifen wir zurück auf (19), also

$$\tan I = \frac{Z}{H} = \frac{B_r}{B_\theta}.$$

Dann entnehmen wir aus (36) für das Dipolfeld

$$(42) \quad \tan I = \frac{B_r}{B_\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{\tan \theta} = \frac{2}{\tan p},$$

also folgt

$$(42) \quad p = \tan^{-1} \left(\frac{2}{\tan I} \right).$$

Die geografische Breite λ_P des (magnetischen) Pols errechnen wir mit Hilfe des 1. Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie: Aus dem Dreieck SPN (Abbildung 2) liest man ab

$$(43) \quad \begin{aligned} \cos(90^\circ - \lambda_P) &= \cos(90^\circ - \lambda_S) \cos p + \sin(90^\circ - \lambda_S) \sin p \cos D \\ \sin \lambda_P &= \sin \lambda_S \cos p + \cos \lambda_S \sin p \cos D \\ \lambda_P &= \sin^{-1} (\sin \lambda_S \cos p + \cos \lambda_S \sin p \cos D) \end{aligned}$$

Die Differenz der geografischen Längen von Pol P und Ort S , hier mit β bezeichnet (Abbildung 2) und in Richtung Osten positiv gezählt, folgt aus dem Sinussatz der sphärischen Trigonometrie – wiederum angewandt auf Dreieck SPN :

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin p} &= \frac{\sin D}{\sin(90^\circ - \lambda_P)} \\ \frac{\sin \beta}{\sin p} &= \frac{\sin D}{\cos \lambda_P} \\ \beta &= \sin^{-1} \left(\frac{\sin p \sin D}{\cos \lambda_P} \right) \end{aligned}$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten für die geografische Länge des Pols: Er liegt entweder östlich oder westlich von S . Ist $\cos p \geq \sin \lambda_S \sin \lambda_P$, gilt

$$(45) \quad \phi_P = \phi_S + \beta,$$

anderenfalls ($\cos p < \sin \lambda_S \sin \lambda_P$)

$$(46) \quad \phi_P = \phi_S + 180^\circ - \beta.$$

Damit haben wir die geografischen Koordinaten (λ_P, ϕ_P) des Pols bestimmt.

Es fehlt noch ein Zahlenbeispiel: In Mönchengladbach ($\lambda_{MG} = 51,2^\circ$ Nord, $\phi_{MG} = 6,43^\circ$ Ost) wird gemessen $D = 1^\circ 48' = 1,8^\circ$ und $I = 66^\circ 28' = 66,47^\circ$. Daraus folgen

$$\begin{aligned}
 p &= 0,7165 = 44,052^\circ \\
 \lambda_P &= 1,5266 = 87,470^\circ \\
 \beta &= 0,4861 = 27,854^\circ \\
 \sin\lambda_S \sin\lambda_P &= 0,7785 \\
 \cos p &= 0,7541 \quad , \text{ also } \cos p < \sin\lambda_S \sin\lambda_P \\
 \phi_P &= 6,43^\circ + 180^\circ - 27,85^\circ = 158,58^\circ
 \end{aligned}$$

Der magnetische Pol läge damit bei P (88° Nord, 159° West). In den Tabellen (2017) wird angegeben P (86° Nord, 160° West).

6. Zum Schluss

Ich lese bei Kehlmann das Wort *Kugelfunktionen* und mache mich daran, der Sache auf den Grund zu gehen. Lerne, wie Gauß die Kugelfunktionen dazu benutzt, das Erdmagnetfeld darzustellen. Die obigen Zeilen sind Extrakte aus der Literatur, keine originellen Überlegungen zum Thema. Zum Nachschlagen für mich. Dass Gauß zusammen mit Weber auch handfeste Experimente und Messungen zum Magnetismus gemacht hat, kommt auch bei Kehlmann vor. Vermutlich genau so interessant wie die Sache mit den Kugelfunktionen. Vielleicht beschäftige ich mich demnächst damit.

Literatur und Anmerkungen

¹ Kehlmann, Daniel: *Die Vermessung der Welt*, Roman, Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbeck bei Hamburg, 2008

² Gauß, Carl Friedrich: *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*. Leipzig 1839, S. 1–57. In: Gauß-Werke 5, S. 119–175.

³ Garland, G. D.: *The Contributions of Carl Friedrich Gauss to Geomagnetism*, *Historia Mathematica* **6** (1979), S. 5 – 29, <https://www.sciencedirect.com/science/.../pii/0315086079901009>

⁴ Ein Magnetfeld in einem Gebiet zu beschreiben, das keine Quellen enthält, ist etwas ungewöhnlich. In Übungsaufgaben zur Elektrodynamik der Magnetfelder sind meistens Quellen im Spiel. Die simple Stromschleife zum Beispiel. In diesem Fall gibt es kein skalares Potenzial, hier ist das Vektorpotenzial \mathbf{A} angesagt: $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

⁵ Finlay, C. C. et al.: *International Geomagnetic Reference Field: the Eleventh Generation*, *Geophysical Journal International*, Volume 183, Pages 1216–1230, <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04804.x>

⁶ Zum Beispiel Griffiths, D. J.: *Elektrodynamik*, Pearson, München 2011