Foucault-Pendel[1]

1. Newtonsche Grundgleichung im rotierenden System

Newtons Gleichung in der Form *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* gilt nur in einem Inertialsystem (d. h., in einem System, das sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt). In einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden System gilt dagegen

$$(1) \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \ .$$

Dabei ist m die Masse, $\vec{r}$ der Ortsvektor und $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Körpers im rotierenden System. Auf der rechten Seite der Gleichung steht $\vec{F}$ für die eingeprägte Kraft. Die nachfolgenden Terme sind, der Reihe nach, das Produkt aus Masse und Bahnbeschleunigung, die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft. Sie werden auch (etwas irreführend) „Scheinkräfte" genannt.

2. Bewegungsgleichung des Foucault-Pendels

Für eine Bewegung auf der Erdoberfläche ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei der Drehung um ihre Achse. Sie kann als konstant angenommen werden, so dass der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (1) verschwindet. Da ω sehr klein ist, können wir in unserem Fall auch die Zentrifugalkraft gegenüber der Corioliskraft vernachlässigen. Denn die Zentrifugalkraft ist proportional zu ω^2, während die Corioliskraft linear mit ω ansteigt.

Auf das Foucault-Pendel wirken als eingeprägte Kräfte die Gewichtskraft $m\vec{g}$ und die Zugkraft $\vec{T}$, die vom Pendelfaden ausgeübt wird. Also folgt für die Bewegungsgleichung des Pendels in unserer Näherung

$$(2) \qquad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

Wir legen ein Koordinatensystem zugrunde, bei dem (am Ort des Pendels auf der Erdoberfläche) die x-Achse nach Süden, die y-Achse nach Osten und die z-Achse nach oben (Zenit) zeigt (Abb. 1).

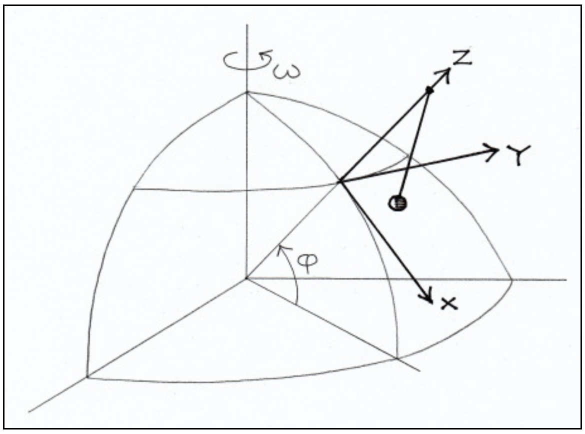

Abb. 1 Rotierendes Koordinatensystem

Die Länge des Pendelfadens sei L. Die Zugkraft spalten wir auf in ihre Komponenten

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix},$$

mit $\dfrac{T_x}{T} = -\dfrac{x}{L}$, $\dfrac{T_y}{T} = -\dfrac{y}{L}$ und $\dfrac{T_z}{T} = \dfrac{L-z}{L}$,

wie aus Abb. 2 ersichtlich.

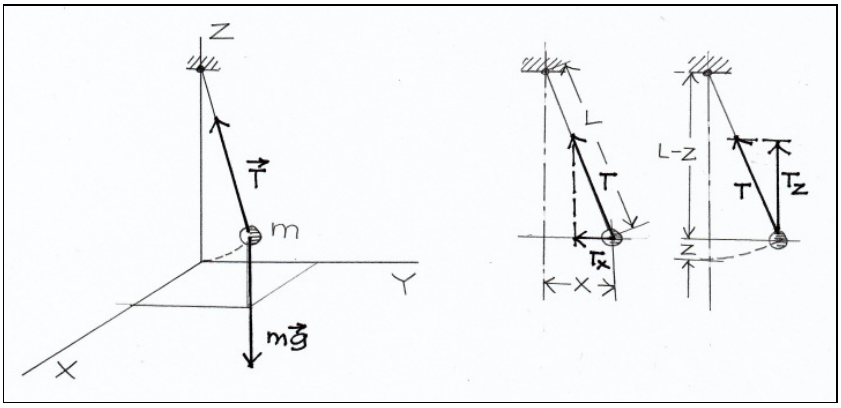

Abb. 2 Zerlegung der Zugkraft T in Komponenten

Der Vektor der Gewichtskraft ist

$$m\vec{g} = mg\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und die Winkelgeschwindigkeit lässt sich, wie Abb. 3 zeigt, schreiben als

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\varphi \\ 0 \\ \omega\sin\varphi \end{pmatrix},$$

wobei φ die geografische Breite des Pendelortes ist.

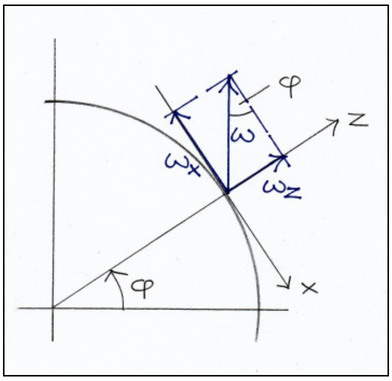

Abb. 3 Zerlegung von ω in Komponenten

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Pendels schreiben wir als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

so dass das Kreuzprodukt $\vec{\omega} \times \vec{v}$ in Komponentenschreibweise

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega \sin\varphi \cdot \dot{x} \\ \omega \cos\varphi \cdot \dot{z} + \omega \sin\varphi \cdot \dot{x} \\ -\omega \cos\varphi \cdot \dot{y} \end{pmatrix}.$$

ergibt. Gleichung (2) wird damit zu

$$(3) \qquad m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/L \\ -y/L \\ (L-z)/L \end{pmatrix} T + mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} -\omega \sin\varphi \cdot \dot{x} \\ \omega \cos\varphi \cdot \dot{z} + \omega \sin\varphi \cdot \dot{x} \\ -\omega \cos\varphi \cdot \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Sie ist (vermutlich) nur numerisch zu lösen. Es gibt jedoch plausible *Näherungen*, die sie analytisch lösbar machen.

3. Näherung kleiner Amplituden

In der Regel sind die Pendelamplituden klein gegenüber der Pendellänge L. Insbesondere ist z sehr klein gegenüber L, so dass der Term $(L - z)/L$ der z-Komponente von T näherungsweise gleich 1 gesetzt werden kann. Das bedeutet, die Bewegung des Pendels findet nur in der xy-Ebene statt. In dieser Näherung setzt man daher $\ddot{z} = \dot{z} = 0$. Aus der z-Komponente von Gl. (3) folgt dann für die unbekannte Zugkraft

$$T = mg - 2m\omega \cos\varphi \cdot \dot{y}$$

Setzt man diesen Term (und die Näherung $\dot{z} = 0$) in die x- und y-Komponenten von Gl. (3) ein, erhält man nach Division durch m das System der gekoppelten (nichtlinearen) Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{L}x + \frac{2\omega}{L}\cos\varphi \cdot x\dot{y} + 2\omega \sin\varphi \cdot \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{L}y + \frac{2\omega}{L}\cos\varphi \cdot y\dot{y} - 2\omega \sin\varphi \cdot \dot{x} \end{aligned}.$$

In diesen Gleichungen vernachlässigen wir in der Näherung kleiner Amplituden die Terme mit $\omega x\dot{y}$ und $\omega y\dot{y}$ gegenüber den anderen mit $\omega \dot{x}$, $\omega \dot{y}$, x und y. Damit entfallen die nichtlinearen Terme und wir erhalten

$$(4) \qquad \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{L}x + 2\omega \sin\varphi \cdot \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{L}y - 2\omega \sin\varphi \cdot \dot{x} \end{aligned}.$$

Dieses System ist analytisch lösbar. Zur Abkürzung schreiben wir

(5) $$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad \text{und} \quad \alpha = \omega \sin\varphi \ .$$

Dabei ist ω_0 die (Kreis−)Frequenz der Pendelschwingung (nicht zu verwechseln mit ω, der Winkelgeschwindigkeit der Erde). Die physikalische Interpretation von α wird sich weiter unten herausstellen. Unsere Differenzialgleichungen lauten damit

(6) $$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x + 2\alpha\,\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y - 2\alpha\,\dot{x} \end{aligned} \ .$$

Wir wählen einen komplexen Lösungsansatz. Dazu schreiben wir den Term $+2\alpha\dot{y}$ der ersten Gleichung als $-2\alpha i^2 \dot{y}$, multiplizieren die zweite Gleichung mit i und addieren schließlich beide Gleichungen. Das ergibt

$$\ddot{x} + i\,\ddot{y} = -\omega_0^2 (x + i\,y) - 2\alpha i (\dot{x} + i\,\dot{y}) \ .$$

Damit genügt die komplexe Variable $u = x + iy$ der Gleichung

(7) $$\ddot{u} + 2\alpha i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \,,$$

das heißt, der aus der Schwingungslehre bekannten linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Ansatz $u = C e^{i\omega t}$ führt zu $\dot{u} = i\omega C e^{i\omega t}$, $\ddot{u} = -\omega^2 C e^{i\omega t}$ und ergibt

$$(-\omega^2 + 2\alpha i^2 \omega + \omega_0^2)\, C e^{i\omega t} = 0 \ .$$

Damit die linke Seite dieser Gleichung für *alle* Zeiten t gleich Null ist, muss die Klammer verschwinden. Es ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\omega^2 + 2\alpha\omega - \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\omega = -\alpha \pm \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2} \ .$$

Da $(\alpha/\omega_0)^2 \cong (\omega/\omega_0)^2 = (T_{Pendel}/T_{Erde})^2 << 1$, sind die Lösungen in guter Näherung

$$\omega = -\alpha \pm \omega_0 \ .$$

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist damit

$$u = A e^{-i(\alpha - \omega_0)t} + B e^{-i(\alpha + \omega_0)t} \ .$$

Wir spalten A und B und die Exponentialterme in Real- und Imaginärteil auf und erhalten

$$u = x + iy = (A_1 + iA_2)\left[\cos(\alpha-\omega_0)t - i\sin(\alpha-\omega_0)t\right] + (B_1 + iB_2)\left[\cos(\alpha+\omega_0)t - i\sin(\alpha+\omega_0)t\right]$$

und weiter

$$\begin{aligned} x &= A_1\cos(\alpha-\omega_0)t + A_2\sin(\alpha-\omega_0)t + B_1\cos(\alpha+\omega_0)t + B_2\sin(\alpha+\omega_0)t \\ y &= -A_1\sin(\alpha-\omega_0)t + A_2\cos(\alpha-\omega_0)t - B_1\sin(\alpha+\omega_0)t + B_2\cos(\alpha+\omega_0)t \end{aligned} \quad . \tag{8}$$

Daraus folgt

$$\dot{x} = -(\alpha-\omega_0)A_1\sin(\alpha-\omega_0)t + (\alpha-\omega_0)A_2\cos(\alpha-\omega_0)t - (\alpha+\omega_0)B_1\sin(\alpha+\omega_0)t + (\alpha+\omega_0)B_2\cos(\alpha+\omega_0)t$$
$$\dot{y} = -(\alpha-\omega_0)A_1\cos(\alpha-\omega_0)t - (\alpha-\omega_0)A_2\sin(\alpha-\omega_0)t - (\alpha+\omega_0)B_1\cos(\alpha+\omega_0)t - (\alpha+\omega_0)B_2\sin(\alpha+\omega_0)t$$

4. Anfangsbedingungen und Lösung

Unsere Anfangsbedingungen seien

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; \quad \dot{x}_0 = 0 \\ y_0 &= l; \quad \dot{y}_0 = 0. \end{aligned}$$

Das heißt, das Pendel wird zur Zeit $t = 0$ nach Osten um die Strecke l ausgelenkt und dann losgelassen. Aus $x_0 = 0$ folgt $0 = A_1 + B_1$, also $B_1 = -A_1$. Aus $\dot{x}_0 = 0$ folgt

$$0 = (\alpha-\omega_0)A_2 + (\alpha+\omega_0)B_2 \quad \text{oder} \quad B_2 = -\frac{\alpha-\omega_0}{\alpha+\omega_0}A_2 \quad .$$

Da α gegenüber ω_0 vernachlässigt werden kann, ist $B_2 = A_2$. Damit vereinfachen sich die Gleichungen (8) zu

$$\begin{aligned} x &= A_1\cos(\alpha-\omega_0)t + A_2\sin(\alpha-\omega_0)t - A_1\cos(\alpha+\omega_0)t + A_2\sin(\alpha+\omega_0)t \\ y &= -A_1\sin(\alpha-\omega_0)t + A_2\cos(\alpha-\omega_0)t + A_1\sin(\alpha+\omega_0)t + A_2\cos(\alpha+\omega_0)t \end{aligned} \quad .$$

Aus $y_0 = l$ folgt weiterhin $l = A_2 + A_2$, also $A_2 = l/2$, und $\dot{y} = 0$ führt zu

$$0 = (-\alpha + \omega_0 + \alpha + \omega_0)A_1$$

also $A_1 = 0$. Damit lautet die den Anfangsbedingungen angepasste Lösung

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2}\left[\sin(\alpha-\omega_0)t + \sin(\alpha+\omega_0)t\right] \\ y &= \frac{l}{2}\left[\cos(\alpha-\omega_0)t + \cos(\alpha+\omega_0)t\right] \end{aligned} \quad .$$

Mit Hilfe der Additionsformeln

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x\sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x\sin y \end{aligned}$$

wird daraus

$$(9)\qquad \begin{aligned} x &= l\cos\omega_0 t\sin\alpha t \\ y &= l\cos\omega_0 t\cos\alpha t \end{aligned}$$

oder, in Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l\cos\omega_0 t\begin{pmatrix} \sin\alpha t \\ \cos\alpha t \end{pmatrix}.$$

In dieser Gleichung beschreibt der Term $l\cos\,\omega_0 t$ die Bewegung des Pendels in seiner momentanen Schwingungsebene – mit Amplitude l und (Kreis–)Frequenz ω_0. Der Vektor ($\sin\alpha t$ /$\cos\alpha t$) ist ein Einheits-Ortsvektor, der in der xy-Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit α um den Nullpunkt rotiert. Er liegt in der Schwingungsebene des Pendels und beschreibt daher dessen Drehung um die vertikale Pendelachse (Abb. 4).

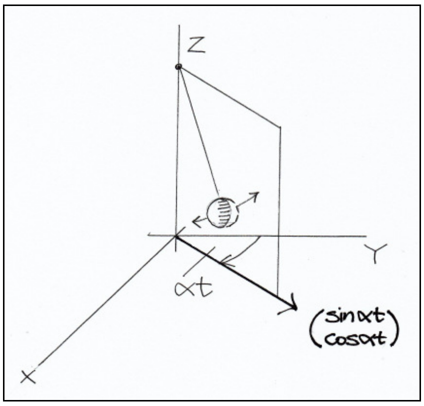

Abb. 4 Rotation der Schwingungsebene

Drückt man den Einheitsvektor ($\sin\alpha t$ /$\cos\alpha t$) in Polarkoordinaten (r/θ) aus, so erhält man

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sin^2\alpha t + \cos^2\alpha t} = 1 \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} - arc\cot\left(\frac{\cos\alpha t}{\sin\alpha t}\right) = \frac{\pi}{2} - arc\cot(\cot\alpha t) = \frac{\pi}{2} - \alpha t \end{aligned}.$$

Das heißt, die Ableitung von θ nach der Zeit t ist $-\alpha$. Andererseits ist $\alpha = \omega\sin\varphi$, daher dreht sich die Schwingungsebene auf der Nordhalbkugel der Erde ($\varphi > 0$) in mathematisch negativer Richtung oder, umgangssprachlich formuliert, *im Uhrzeigersinn*.

5. Numerischer Wert der Winkelgeschwindigkeit, mit der die Schwingungsebene für φ = 51° rotiert

Für die geografische Breite $\varphi = 51°$ ist $\alpha = \omega\sin\varphi = (2\pi/24\text{ h})\sin(51°) = 11{,}7°/\text{h}$. Das heißt, die Schwingungsebene eines Foucault-Pendels sollte sich in Mönchengladbach pro Stunde um 11,7° *im Uhrzeigersinn* um die vertikale Pendelachse drehen.

[1] Auszug aus dem Vorlesungsskript www.physik.**lmu**.de/lehre/vorlesungen/wise_12.../skript_p1_**lesch**.pdf