

## Ist die elektrische Feldstärke einer Punktladung exakt proportional $1/r^2$ ?

Feynman's *Lectures on Physics* sind unübertroffen, wenn es darum geht, Physik zu verstehen<sup>1</sup>. Interessant auch die „Ausflüge“ in die Nischen der Physik, die vom Lehrbuchstoff abschweifen und längst Bekanntes in Frage stellen. Ein kleiner Abschnitt im Kapitel Elektrostatik<sup>2</sup> beispielsweise ist überschrieben: *Is the field of a point charge exactly  $1/r^2$  ?* Sicher keine Frage, die im Alltagsgeschäft der Physik eine Rolle spielt. Aber welchen Physiker interessiert es nicht, ob der Exponent von  $r$  im Coulomb'schen Gesetz nun genau 2 ist, oder ob er, vielleicht bei sehr großen und sehr kleinen Abständen, von diesem Wert abweicht<sup>3</sup>. Oder in wie weit man eine Abweichung vom Wert 2 heutzutage aufgrund von Messungen im Labor einschränken kann. Bei den Messungen im Labor nutzt man die Tatsache aus, dass nur bei exaktem  $1/r^2$ -Verlauf das Innere eines geladenen Leiters feldfrei ist. In der Regel misst man dazu die Potenzialdifferenz zwischen zwei konzentrisch angeordneten metallischen Kugeln: einer äußeren, auf möglichst hohe Spannung aufgeladenen Hohlkugel und einer im Innern befindlichen kleineren Metallkugel. Das Experiment liefert eine obere Grenze für die Potenzialdifferenz, aus der man den Maximalbetrag der Abweichung des Exponenten von  $r$  vom Wert 2 gewinnt (Rechnungen dazu weiter unten). Daten, die ich vor Jahren anlässlich eines Vortrags zusammengetragen hatte<sup>3</sup>, ergaben damals eine obere Grenze von etwa  $10^{-11}$  für die relative Abweichung vom Wert 2. Inzwischen gibt es Experimente, die diese Grenzen weiter verbessert haben<sup>4</sup>. Damit wird auch die obere Grenze für die Masse des Photons weiter eingeschränkt<sup>5</sup>.

Zum Verständnis der Potenzialdifferenzmessungen sind die nachfolgenden Überlegungen und Rechnungen hilfreich. Außerdem wird ein für den Schulunterricht geeignetes Experiment beschrieben, mit dem eine obere Grenze für diese Potentialdifferenz bestimmt werden kann.

Das Innere einer geladenen Hohlkugel ist feldfrei, wenn die Ladung auf ihr homogen verteilt ist. Dass dies eine Folge des  $1/r^2$ -Gesetzes ist, ergibt sich aus folgender Überlegung: Wir denken uns einen beliebigen Punkt  $P$  im Innern der Kugel, durch den wir eine beliebig orientierte Gerade legen. Diese sei die Achse eines Doppelkegels mit dem Scheitelpunkt  $P$ , der aus der Kugel zwei gegenüber liegende Flächen  $A_1$  und  $A_2$  herauschneidet (Abbildung 1). Der Punkt  $P$  habe von  $A_1$  den Abstand  $r_1$ , von  $A_2$  den Abstand  $r_2$ . Wir betrachten jetzt die Feldstärken  $E_1$  und  $E_2$ , die sich im Punkt  $P$  aufgrund der Ladungen in  $A_1$  bzw.  $A_2$  ergeben. Da es sich um gleichnamige Ladungen handelt, sind  $E_1$  und  $E_2$  entgegengesetzt gerichtet. Ihre Beträge sind wegen der homogenen Ladungsverteilung proportional zu den Flächeninhalten  $A_1$  bzw.  $A_2$  und wegen des  $1/r^2$ -Gesetzes umgekehrt proportional zu  $r_1^2$  bzw.  $r_2^2$ . Also  $E_1 \propto A_1/r_1^2$  und  $E_2 \propto A_2/r_2^2$ . Das aber heißt, die Feldstärken verhalten sich wie die *Raumwinkel*, die von den beiden Hälften des Doppelkegels überstrichen werden – und die sind gleich. Somit heben sich  $E_1$  und  $E_2$  exakt auf und die Feldstärke in  $P$  aufgrund der Ladungen in den gegenüber liegenden Flächen  $A_1$  und  $A_2$  ist Null. Dieselbe Überlegung gilt für alle Doppelkegel durch  $P$  und für alle Punkte  $P$  im Innern der Kugel.

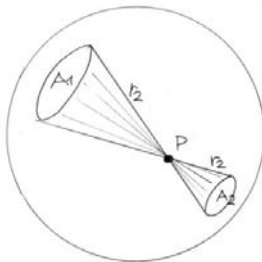


Abbildung 1 Die Feldstärken im Punkt  $P$ , die von den Ladungen auf den Flächen  $A_1$  und  $A_2$  ausgehen, sind proportional zum Raumwinkel, unter dem sie von  $P$  aus erscheinen. Da die Raumwinkel  $A_1/r_1^2$  und  $A_2/r_2^2$  gleich sind, sind es die Feldstärken auch. Wegen der gleichnamigen Ladungen sind sie entgegengesetzt gerichtet.

Ist die elektrische Feldstärke  $E$  überall im Innern der Kugel Null, hat jeder Punkt dort gleiches Potenzial. Denn  $E$  ist bekanntlich gleich dem (negativen) Gradienten des Potentials. Eine zweite Metallkugel, die sich im Innern der geladenen Kugel befindet, hat daher das gleiche Potenzial wie die äußere, geladene Kugel. Ein Voltmeter zwischen beiden Kugeln zeigt keinen Ausschlag, unabhängig davon, auf welche Spannung (welches Potenzial) die äußere Kugel aufgeladen ist. Die äußere Kugel wirkt, wie man sagt, als *Faradayscher Käfig*.

Offenbar ist die Potenzialdifferenz zwischen innerer und äußerer Kugel nicht mehr Null, wenn die Coulombkraft vom  $1/r^2$ -Verlauf abweicht. Um das zu zeigen, nehmen wir wie üblich an, der Exponent von  $r$  weiche um eine kleine Größe  $\varepsilon$  vom Wert 2 ab. Wir schreiben daher die Feldstärke  $E$ , die von einer punktförmigen Ladung  $q$  ausgeht, als

$$(1) \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^{2+\varepsilon}}.$$

Die nun folgende Rechnung geht auf *Maxwell*<sup>6</sup> zurück.

Folgt die Feldstärke, die von einer Punktladung ausgeht, dem nach Gl. (1) modifizierten Verlauf, nimmt das Potenzial gemäß  $r^{-(1+\varepsilon)}$  mit wachsendem Abstand vom Ort der Ladung ab. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ist über das Volumen zu integrieren, in dem sich die Ladung befindet. Ist  $\rho$  die Dichte der räumlich verteilten Ladung, ergibt sich für das Potenzial am Ort  $\vec{x}$

$$(2) \quad V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{1+\varepsilon}}$$

Integriert wird über die gestrichelten Koordinaten. In unserem Fall ist  $\rho$  die Dichte der Ladung auf der äußeren Kugel. Diese habe den Radius  $a$ , so dass wir schreiben

$$\rho(r', \theta', \varphi') = \sigma \delta(r' - a).$$

Dabei sind wir zu Kugelkoordinaten  $(r', \theta', \varphi')$  mit dem Nullpunkt im Zentrum der Hohlkugel übergegangen. Die gleichmäßige Verteilung der Ladung über die Hohlkugel wird durch das Produkt Flächenladungsdichte  $\sigma$  (konstant) mal Delta-Funktion  $\delta(r' - a)$  ausgedrückt. Die gesamte, auf der Kugel befindliche Ladung ist damit  $Q = 4\pi a^2 \sigma$ .

Wir berechnen nun das Potenzial an einem beliebigen Punkt  $P$  im Innern der Kugel. Der Symmetrie wegen legen wir (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die  $z$ -Achse des Koordinatensystems

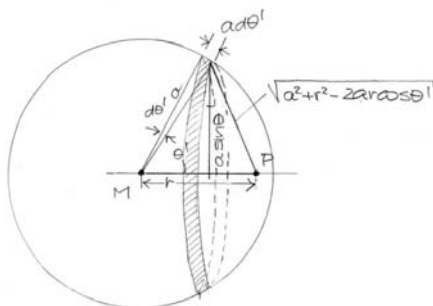


Abbildung 2 Zur Integration über die Ladung der Hohlkugel, Gl.(3) des Textes

durch diesen Punkt. Dann ist  $r$  der Abstand dieses Punktes vom Kugelmittelpunkt und das Produkt Ladungsdichte mal Volumenelement lässt sich schreiben (Abb. 2)

$$(3) \quad \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' = \sigma \delta(r' - a) dr' r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'.$$

Im Integral Gl. (2) führen wir vorab die Integration über  $r'$  und  $\phi'$  aus und erhalten

$$(4) \quad \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' = \sigma 2\pi a^2 \sin \theta' d\theta'.$$

Das heißt, wir berechnen den Beitrag zum Potenzial der Ladung, die sich auf der Kugeloberfläche in einem Ring der Breite  $a d\theta'$  mit dem Radius  $a \sin \theta'$  befindet (Abb. 2). Der Abstand dieses Ladungselements vom Punkt  $P$  ist

$$(5) \quad |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta'}.$$

Damit wird das Integral Gl. (2)

$$(6) \quad \begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sigma 2\pi a^2 \sin \theta' d\theta'}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta')^{(1+\epsilon)/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta')^{(1+\epsilon)/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^{-1} \frac{-d(\cos \theta')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta')^{(1+\epsilon)/2}} \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$u = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta'$$

wird

$$\frac{du}{d(\cos \theta')} = -2ar, \quad \text{also} \quad -d(\cos \theta') = \frac{du}{2ar}$$

und das Integral zu

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2ar} \int_{(a-r)^2}^{(a+r)^2} \frac{du}{u^{(1+\epsilon)/2}}.$$

Die Integration ergibt

$$(7) \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2ar} \frac{2}{1-\epsilon} \left[ (a+r)^{1-\epsilon} - (a-r)^{1-\epsilon} \right].$$

Da wir das Potenzial nur im Innern der Kugel berechnen, ist  $a > r$ . Daher ist auch der zweite Term in der eckigen Klammer größer als Null (anderenfalls hätte man den Term  $a - r$  in Betragstrichen klammern müssen). Für das Potenzial der äußeren Kugel ( $r = a$ ) erhalten wir

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a^2} \frac{2}{1-\epsilon} (2a)^{1-\epsilon}.$$

Der auf  $V(a)$  bezogene relative Potenzialunterschied zwischen einem Punkt im Abstand  $r$  vom Kugelmittelpunkt und der äußeren Hohlkugel (Abstand  $a$  vom Mittelpunkt der Kugel) beträgt somit

$$(8) \quad \frac{V(r) - V(a)}{V(a)} = \frac{a}{r} \left[ \left( \frac{a+r}{2a} \right)^{1-\varepsilon} - \left( \frac{a-r}{2a} \right)^{1-\varepsilon} \right] - 1.$$

Der Term auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich wegen  $x^{-\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon \ln x$  für  $\varepsilon \ll 1$  näherungsweise schreiben

$$\frac{V(r) - V(a)}{V(a)} \cong \frac{a}{r} \left[ \left( \frac{a+r}{2a} \right) \left( 1 - \varepsilon \ln \frac{a+r}{2a} \right) - \left( \frac{a-r}{2a} \right) \left( 1 - \varepsilon \ln \frac{a-r}{2a} \right) \right] - 1.$$

Durch Umformung erhält man daraus den *Maxwellschen* Term<sup>6</sup>

$$(9) \quad \frac{V(r) - V(a)}{V(a)} \cong -\frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{a}{r} \ln \left( \frac{a-r}{a+r} \right) - \ln \left( \frac{a^2 - r^2}{4a^2} \right) \right].$$

Man schreibt in der Regel

$$(10) \quad \frac{V(r) - V(a)}{V(a)} \cong \varepsilon M(a, r)$$

mit

$$(11) \quad M(a, r) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{a}{r} \ln \left( \frac{a-r}{a+r} \right) - \ln \left( \frac{a^2 - r^2}{4a^2} \right) \right]$$

als „Geometriefaktor“. Dieser Geometriefaktor ist von der Größenordnung 1, sein Verlauf als Funktion von  $r/a$  zeigt Abbildung 3. Er nimmt Werte an zwischen  $M(0) = 0,3069$  und  $M(1) = 0$ .

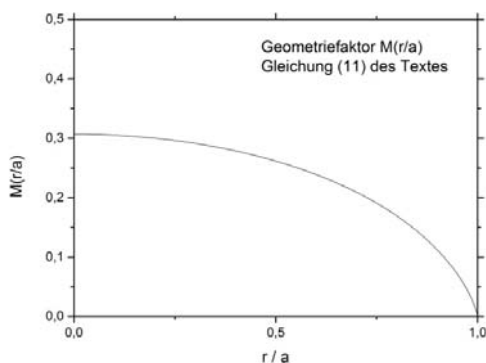


Abbildung 3 Geometriefaktor  $M(r/a)$ , Gl.(11) des Textes. Die Randwerte sind  $M(0) = 0,31$  und  $M(1) = 0$ .

Šabatka und Dvořák<sup>7</sup> beschreiben ein für den Schulunterricht geeignetes Demonstrationsexperiment, mit dem sich eine obere Grenze für den Potenzialunterschied zwischen innerer und äußerer Kugel bestimmen lässt. Meine mit den Mitteln der Physiksammlung aufgebaute Apparatur sah ähnlich aus: Statt der äußeren Kugel wird ein zylindrischer Drahtkäfig (Durchmesser 24 cm, Höhe 30 cm) mit einer Maschenbreite von etwa 1 cm verwandt. Er wird von der Lehrmittelindustrie<sup>8</sup> als Modell eines Faradayschen Käfigs angeboten. Der Käfig ruht auf einer Aluminiumplatte, die ihn nach unten elektrisch leitend abschließt. Käfig und Platte wiederum liegen auf einer mehrere Zentimeter dicken Styroporscheibe und sind damit gegen Erde isoliert. Die innere Kugel ist eine der üblichen

Konduktorkugeln (Durchmesser 12 cm), die in jeder Physiksammlung vorhandenen sind. Die Kugel liegt etwa in der Mitte des Käfigs auf einem Glasgefäß und ist damit ihrerseits gegenüber der Aluminiumplatte (und dem Drahtkäfig) isoliert. Auf der Oberseite der Kugel befindet sich das Messgerät zur Messung der Potentialdifferenz, ein Digitalvoltmeter mit möglichst großem Innenwiderstand. Die Eingangsbuchsen des Voltmeters werden durch kurze Kabel mit der inneren Kugel bzw. dem Drahtkäfig verbunden<sup>9</sup>. Abbildung 4 zeigt eine schematische Skizze, Abbildung 5 ein Foto der Anordnung.

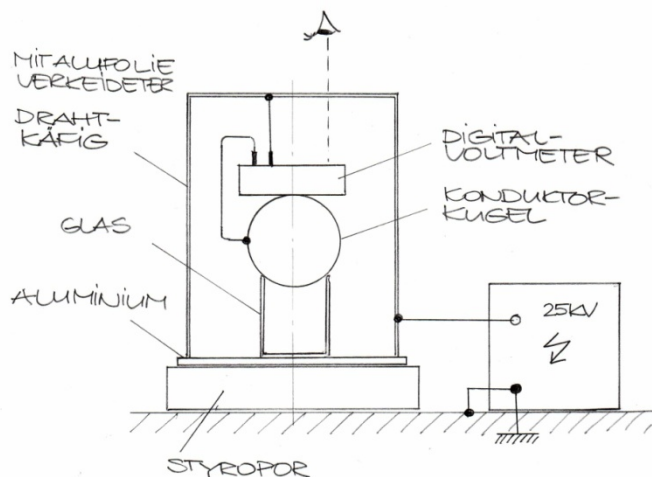


Abbildung 4 Versuchsanordnung zur Bestimmung der Potentialdifferenz zwischen Drahtkäfig und Kugelkonduktor im Innern des Käfigs, siehe Text.

Zur Messung wurde der Drahtkäfig mit dem Ausgang eines Hochspannungsgeräts verbunden und auf  $U_0 = 25 \text{ kV}$  aufgeladen. Dabei blieb die Anzeige des Voltmeters im 200 mV-Bereich bis auf weniger als 0,1 mV konstant. Die Genauigkeit der Anzeige wird vom Hersteller<sup>10</sup> mit  $\pm (0,5 \% + 2 \text{ digits})$  angegeben, das sind  $\pm (1 + 0,2) \text{ mV}$ . Also ist die Potentialdifferenz  $\Delta V = V(r) - V(a)$  in Gl. (10) zwischen Drahtkäfig und innerer Kugel maximal 1,3 mV.

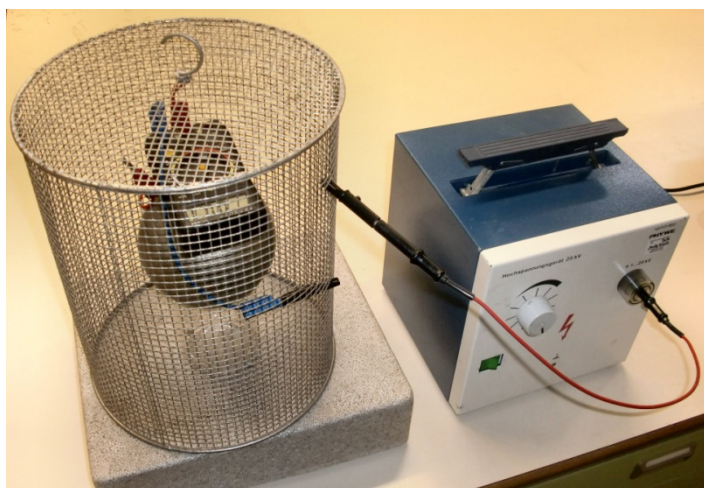


Abbildung 5 Foto der Versuchsanordnung

Als Geometriefaktor wird ein mittlerer Wert  $M = 0,2$  angenommen, so dass Gl. (10) zu

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V(r) - V(a)}{V(a)} \cong 0,2 \varepsilon,$$

wird. Mit

$$\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{1,3 \text{ mV}}{25 \text{ kV}} \approx 5 \cdot 10^{-8}$$

folgt als (sehr grob geschätzte) obere Grenze für den Betrag der Abweichung des Exponenten vom Wert 2

$$|\varepsilon| \leq \frac{5 \cdot 10^{-8}}{0,2} = 2,5 \cdot 10^{-7} \quad .$$

Dieser Wert ist zwar klein gegenüber 2, aber keineswegs rekordverdächtig. Er wird von modernen Experimenten<sup>4</sup> um viele Zehnerpotenzen unterboten.

Der Versuch ist deshalb mehr Demonstration als Messung. Er soll ja auch in erster Linie zeigen, dass man die Abweichung vom Wert 2 des Exponenten im Coulombschen Gesetz bestimmen kann ohne die Entfernungsabhängigkeit der Coulombkraft zu messen.

## Literatur und Anmerkungen

<sup>1</sup> Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley. Reading MS, USA, 1963 – Natürlich bemühen sich alle Physiklehrbücher, die Physik verständlich zu machen. [Hier](#) eine Liste der Bücher, in die ich bei Bedarf hineinschaue.

<sup>2</sup> Richard P. Feynman et al., Band II, Abschnitt 5–8, a. a .O.

<sup>3</sup> H. Theissen, *Physik und Didaktik*, Bayerischer Schulbuch-Verlag, 3 (1975), S. 57. Die damaligen Messdaten bestätigten darüber hinaus  $1/r^2$  für Abstände zwischen  $10^{-17}$  und  $10^{+8}$  m, also über einen Bereich von 25 Zehnerpotenzen.

<sup>4</sup> ein Überblick über die Entwicklung der Experimente bis zum Jahr 2004 enthält beispielsweise die Arbeit: B. G. Spavieri, G. T. Gillies und M. Rodriguez, Physical Implications of Coulomb's Law, *Metrologia* **41** (2004) S.159 – 170

<sup>5</sup> Liang-Cheng Tu and Jun Luo: Experimental Tests of Coulomb's Law and the Photon Rest Mass, *Metrologia* **41** (2004) S136 – 146

<sup>6</sup> J. C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism* (3. Auflage, Dover, New York, 1954)

<sup>7</sup> Zdeněk Šabatka und Leoš Dvořák, Department of Physics Education, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, Czech Republic: Two simple ways of verification of the  $1/r^2$  dependence in Coulomb's law at both high school and university level. Internetadresse unbekannt.

<sup>8</sup> z. B. Phywe: Faraday-Käfig, Artikel-Nr.: 06249-00

<sup>9</sup> Man könnte den Drahtkäfig außen mit Aluminiumfolie verkleiden (bis auf ein Sichtfenster zum Ablesen des Anzeigeelements), um ihn elektrisch noch dichter zu machen. In einem Demonstrationsexperiment ist das nicht sinnvoll, da dann der Versuchsaufbau nicht einsehbar ist.

<sup>10</sup> Das Messgerät ist ein VC444 der Fa. Conrad.