

## 1. Einleitung

Die Theorie der Doppelbrechung wird in Lehrbüchern der Elektrodynamik kaum behandelt, obwohl der Durchgang von Licht durch ein anisotropes Medium ein nicht gerade seltenes Phänomen ist. In der modernen Physik wird die Doppelbrechung benutzt, um beispielsweise ultraviolettes Laserlicht zu erzeugen. Es ist daher nicht uninteressant, die Theorie einmal von Grund auf durchzurechnen. Das habe ich in den nachfolgenden Zeilen versucht. Ich starte mit den *Maxwellschen Gleichungen* und dem üblichen Tensor für die Dielektrizitätskonstante des Materials. Ein doppelbrechendes Medium ist beispielsweise der *Kalkspat* ( $CaCO_3$ ), ein Kristall mit genau einer optisch ausgezeichneten Achse. Um die Rechnungen nicht übermäßig aufzublähen, wenden wir die Maxwellsche Theorie nur auf diese Art von Kristallen (*uniaxiale* Kristalle) an.

## 2. Maxwellsche Gleichungen

Das Licht betrachten wir als ebene elektromagnetische Welle. Die elektrische Feldstärke ist dann gegeben durch den Realteil von

$$(1) \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$$

mit den üblichen Bezeichnungen  $\vec{r}$  und  $t$  für Ortsvektor und Zeit.  $\vec{E}_0$  ist die Amplitude der Welle,  $\vec{k}$  der Wellenvektor und  $\omega$  die (Kreis-)Frequenz. Bezeichnet man Wellenlänge und Frequenz der Welle mit  $\lambda$  bzw.  $f$ , dann gilt für den Betrag des Wellenvektors  $k = 2\pi/\lambda$ , und die Kreisfrequenz ist gegeben durch  $\omega = 2\pi f$ .

Für das Medium setzen wir voraus, dass es nicht magnetisch ist (relative Permeabilität  $\mu = 1$ ) und weder freie Ladungen noch freie Ströme enthält. Dann lauten die *Maxwellschen Gleichungen*

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(2) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Dabei ist  $\vec{D}$  die dielektrische Verschiebungsdichte,  $\vec{B}$  die magnetische Feldstärke und  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am. Wie ersichtlich, verwenden wir das MKSA-(SI-)System der Einheiten. Da auch die dielektrische Verschiebungsdichte und die magnetische Feldstärke mit dem Realteil von

$$\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

oszillieren, können wir setzen  $\nabla = i\vec{k}$  und  $\partial/\partial t = -i\omega$ , so dass aus den Gleichungen (2) folgt

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} .$$

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0 \omega \vec{D}$$

Kombiniert man die beiden letzten Gleichungen von (3), erhält man

$$(4) \quad \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\mu_0 \omega^2 \vec{D} .$$

Damit können wir über die beteiligten Vektoren schon folgende Aussagen machen:

Der Vektor der linken Seite von Gl. (4) liegt in der von  $\vec{k}$  und  $\vec{E}$  aufgespannten Ebene und steht senkrecht auf  $\vec{k}$ . Damit liegt auch der Vektor der rechten Seite, also  $\vec{D}$  in dieser Ebene. Aus Gln. (3) folgt weiterhin, dass  $\vec{B}$  sowohl auf  $\vec{k}$  als auch auf  $\vec{E}$  senkrecht steht. Das heißt, die magnetische Feldstärke  $\vec{B}$  steht senkrecht auf der von  $\vec{k}$  und  $\vec{E}$  aufgespannten Ebene. Daraus ergibt sich wiederum, dass der Poynting-Vektor

$$(5) \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

zwar auch in der von  $\vec{k}$  und  $\vec{E}$  aufgespannten Ebene liegt, seine Richtung stimmt aber im Allgemeinen nicht mit der des Wellenvektors  $\vec{k}$  überein. Denn  $\vec{k}$  steht generell senkrecht auf  $\vec{D}$ ,  $\vec{S}$  generell senkrecht auf  $\vec{E}$ , und nur in Sonderfällen sind  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  parallel. Das bedeutet, dass sich der Energiefluss und damit die Welle im Allgemeinen *nicht* in Richtung von  $\vec{k}$  bewegt, sondern unter einem gewissen Winkel dazu. Für die nachfolgenden Überlegungen halten wir fest:  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{S}$  liegen in einer Ebene, sind paarweise orthogonal ( $\vec{D} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{S} \perp \vec{E}$ ) und stehen alle senkrecht auf  $\vec{B}$  (Abb. 1).

Gleichung (4) kann mit Hilfe der Vektor-Identität

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

(Eselsbrücke aus der Studentenzei: „ba(ts)c(h)-cab-Formel“) umgeformt werden zu

$$(6) \quad \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{D}.$$

Von dieser Gleichung werden wir mehrmals Gebrauch machen.

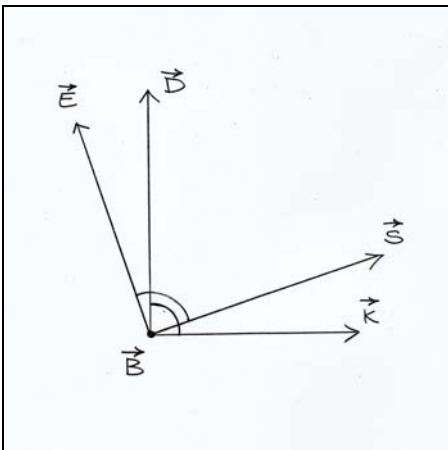


Abb. 1 Richtung der im Text genannten Vektoren Wellenvektor, Verschiebungsdichte, Feldstärke und Poynting-Vektor. Sie stehen paarweise senkrecht aufeinander und liegen alle in einer Ebene (hier in der Papierebene). Der Vektor der magnetischen Feldstärke steht senkrecht auf der Papierebene und zeigt aus ihr heraus.

### 3. Isotropes Medium

Im Fall eines isotropen Mediums ist die Verschiebungsdichte gegeben durch

$$(7) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

wobei  $\varepsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ( $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  As/Vm) und  $\varepsilon$  die relative Dielektrizitätskonstante des Mediums ist. Aus Gl. (6) folgt damit

$$(8) \quad \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Diese Gleichung muss für *alle* Richtungen  $\vec{k}$  erfüllt sein. Daher muss gelten

$$(9) \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

und

$$(10) \quad k^2 = \mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon.$$

Dabei ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Zur Abkürzung wurde also gesetzt  $c^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$ . Als Frequenz der Welle erhält man somit

$$(11) \quad \omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon},$$

und für die Phasengeschwindigkeit

$$(12) \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Es ist üblich, die Phasengeschwindigkeit als Quotient aus Lichtgeschwindigkeit  $c$  und Brechungsindex  $n$  zu schreiben, also zu definieren

$$(13) \quad v_{ph} = \frac{c}{n}.$$

Damit ergibt sich für  $n$  der klassische Wert des Brechungsindex

$$(14) \quad n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Gleichung (7) bedeutet, dass im isotropen Medium  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  parallel sind (so dass, wie schon oben festgestellt,  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  gilt). Daher zeigt auch der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  in Richtung von  $\vec{k}$ . Das heißt, dass sich der Energiefluss, wie man das von einer „normalen“ ebenen Welle erwartet, in Richtung ihres Wellenvektors bewegt – und damit senkrecht zu den Wellenfronten. Kurz zusammengefasst: Im isotropen Medium bewegt sich die Welle mit der Phasengeschwindigkeit  $c/n$  in Richtung ihres Wellenvektors – genau so, wie man es im Physikunterricht der Schule lernt.

## 4. Anisotropes Medium

### 4.1 Fresnel-Gleichung

Wir gehen nun über zum (homogenen) anisotropen Medium. Die Dielektrizitätskonstante ist in diesem Fall ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe ist. Er lässt sich durch eine 3×3-Matrix mit reellen Matrixelementen darstellen. Diese Matrix werde mit  $\tilde{\varepsilon}$  bezeichnet. Da der Tensor symmetrisch ist, gibt es ein (kartesisches) Koordinatensystem, in dem die Matrix diagonal ist. Die rechtwinkligen Achsen dieses Systems nennt man Hauptachsen. Die Elemente der diagonalen Matrix (die „Haupt“-Dielektrizitätskonstanten) seien  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_z$ . In diesem Hauptachsensystem rechnen wir, schreiben also an Stelle von Gl. (7) jetzt

$$(15) \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \vec{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \vec{E},$$

oder, in Komponentenschreibweise

$$(16) \quad D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die Indizes  $i = 1, 2$  und  $3$  ersetzen dabei die (tiefgestellten) Bezeichnungen  $x, y$  und  $z$  für die

Koordinatenachsen. Wir benutzen das jeweils bequemste der beiden Tripel (1, 2, 3) und (x, y, z) zur Kennzeichnung der Achsen. Gleichung (6) wird in Komponentenschreibweise zu

$$(17) \quad k_i \sum_j k_j E_j - k^2 E_i = -\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i E_i \quad (i=1,2,3)$$

oder

$$(18) \quad \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2 \right) E_i = -k_i \sum_j k_j E_j .$$

In dieser Zeile haben wir uns den Hinweis erspart, dass  $i$  die Werte 1, 2 und 3 annimmt, und wollen das auch im Folgenden tun. Die letzte Gleichung lösen wir nach  $E_i$  auf

$$(19) \quad E_i = -\frac{c^2 k_i}{\varepsilon_i \omega^2 - c^2 k^2} \sum_j k_j E_j .$$

Multipliziert man beide Seiten mit  $k_i$  und summiert über die Indizes  $i$ , erhält man

$$(20) \quad \sum_i k_i E_i = -\sum_i \frac{c^2 k_i^2}{\varepsilon_i \omega^2 - c^2 k^2} \sum_j k_j E_j ,$$

eine Gleichung, in der sich die Summen über  $k_i E_i$  weg heben. Es folgt

$$(21) \quad 1 = \sum_i \frac{c^2 k_i^2}{c^2 k^2 - \varepsilon_i \omega^2} ,$$

eine Aussage über den Zusammenhang zwischen Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/k$  (oder Brechungsindex  $n = kc/\omega$ ) und Richtung des Wellenvektors – seine Komponenten  $k_i$  tragen zur Summe mit einem Faktor bei, in dessen Nenner die zugehörige Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i$  steht.

Gleichung (21) ist nach *Fresnel* benannt. In der Literatur wird sie in der Regel anders formuliert. Dazu schreibt man den Wellenvektor als Produkt aus Betrag  $k$  und Einheitsvektor  $\vec{s}$ , das heißt in der Form

$$(22) \quad \vec{k} = k \cdot \vec{s} = k \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = 1 .$$

Das führt zu

$$(23) \quad \sum_i \frac{c^2 k^2 s_i^2}{\omega^2 \left( \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \varepsilon_i \right)} = 1 .$$

Setzt man jetzt  $n = kc/\omega$ , folgt daraus

$$(24) \quad \sum_i \frac{s_i^2}{n^2 - \varepsilon_i} = \frac{1}{n^2} .$$

Vielfach ersetzt man in der Literatur die Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_z$  auch noch durch die Quadrate der entsprechenden Brechungsindizes  $n_x^2$ ,  $n_y^2$  und  $n_z^2$ . Dann folgt, wenn man die Summe ausschreibt, als *Fresnel-Gleichung*

$$(25) \quad \frac{s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_z^2} = \frac{1}{n^2} .$$

Eine weitere Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen der Richtung des Wellenvektors und den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\varepsilon_z$  auszudrücken, geht von Gl. (19) aus. Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit  $\varepsilon_0 \varepsilon_i$  (mit  $i = 1, 2, 3$ ), so dass auf der rechten Seite jetzt ein Ausdruck für die Verschiebungsdichte steht:

$$(26) \quad D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i = - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i c^2 k_i}{\varepsilon_i \omega^2 - c^2 k^2} \sum_j k_j E_j .$$

Diesen formen wir um in

$$(27) \quad D_i = - \frac{k_i}{\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{c^2}{\varepsilon_i}} \frac{\varepsilon_0 c^2}{k^2} \sum_j k_j E_j$$

und setzen zur Abkürzung

$$(28) \quad \frac{\varepsilon_0 c^2}{k^2} \sum_j k_j E_j = P^2 .$$

Das ergibt

$$(29) \quad D_i = - \frac{k_i}{\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{c^2}{\varepsilon_i}} P^2 .$$

Die *Maxwellschen Gleichungen* (3) erfordern, dass die *Divergenz* von  $D$  gleich Null ist, also

$$(30) \quad k_x D_x + k_y D_y + k_z D_z = 0 .$$

Mit der Phasengeschwindigkeit  $v = \omega/k$  (ausnahmsweise einmal ohne tiefgestelltes „*ph*“) folgt dann

$$(31) \quad \frac{k_x^2}{v^2 - \frac{c^2}{\varepsilon_x}} + \frac{k_y^2}{v^2 - \frac{c^2}{\varepsilon_y}} + \frac{k_z^2}{v^2 - \frac{c^2}{\varepsilon_z}} = 0 .$$

Auch hier dividiert man die Komponenten des Wellenvektors gerne durch dessen Betrag, so dass in den Zählern der Brüche die Komponenten des Richtungs-Einheitsvektors erscheinen. Außerdem ersetzt man die Quotienten  $c^2/\varepsilon_i$  durch die Abkürzung  $v_i^2$  ( $i = x, y, z$ ). Dann erhält man als weitere Formulierung der *Fresnel-Gleichung*

$$(32) \quad \frac{s_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{s_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{s_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0 .$$

Beachte, dass in dieser Schreibart der *Fresnel-Gleichung* auf der rechten Seite eine *Null* steht – im Gegensatz Gl. (25).

## 4.2 Ordentlicher und außerordentlicher Strahl im uniaxialen Kristall

Wir suchen jetzt die zu Gl. (11) analoge Aussage für das anisotrope Medium, das heißt, einen Term für die Kreisfrequenz  $\omega$ . Dazu müssten wir eine der beiden Formen der *Fresnel-Gleichung* explizit nach dieser Größe auflösen – aus der Lösung ergeben sich dann Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/k$  und Brechungsindex  $n = kc/\omega$ . Das ist jedoch aufwändig. Bequemer ist es, auf Gl. (18) zurück zu greifen. Diese wird umgeformt zu

$$(33) \quad \sum_j \left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2 \right) \delta_{ij} + k_i k_j \right] E_j = 0 ,$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol ist ( $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$ , sonst  $\delta_{ij} = 0$ ). Dann nämlich lässt sich die linke Seite als Multiplikation einer Matrix  $\underline{M}$  mit dem Vektor  $\vec{E}$  auffassen, also

$$(34) \quad \underline{M} \vec{E} = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{M}_{ij} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2 \right) \delta_{ij} + k_i k_j .$$

Die Matrix lautet ausgeschrieben

$$(35) \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k^2 & k_2 k_3 \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 - k^2 \end{pmatrix}.$$

Gleichung (34) ist ein homogenes lineares Gleichungssystem. Es hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von  $\underline{M}$  gleich Null ist. Also berechnen wir  $\det(\underline{M})$  und untersuchen, für welche Werte von  $\omega$  diese Determinante verschwindet.

Die Rechnung vereinfacht sich erheblich, wenn wir uns von jetzt an auf den *Sonderfall uniaxialer Kristalle* beschränken. Dann nämlich sind zwei der drei (Haupt-)Dielektrizitätskonstanten gleich. Wir setzen z. B.  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , dann wäre  $\varepsilon_3$  die Dielektrizitätskonstante in der durch diese Vereinbarung ausgezeichneten  $z$ -Achse. Diese Achse wird als optische Kristall-Achse ( $c$ -Achse) bezeichnet. Mit  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  lässt sich  $\det(\underline{M})$  vereinfachen zu (Rechnung im Anhang A)

$$(36) \quad c^6 \det(\underline{M}) = \omega^2 (c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon_1) \left[ c^2 (k_1^2 + k_2^2) \varepsilon_1 + (c^2 k_3^2 - \omega^2 \varepsilon_1) \varepsilon_3 \right].$$

Die rechte Seite wird Null für  $\omega = 0$ , also den trivialen Fall keiner Welle, und dann, wenn die Klammern (jede für sich) Null werden. Die runde Klammer verschwindet für

$$(37) \quad \omega^2 = \frac{1}{\varepsilon_1} c^2 k^2,$$

die eckige für

$$(38) \quad \omega^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \left[ (k_1^2 + k_2^2) \varepsilon_1 + k_3^2 \varepsilon_3 \right].$$

In der zweiten Lösung ersetzt man die Komponenten von  $\vec{k}$ , wie schon in den *Fresnel-Gleichungen* getan, durch den Betrag  $k$ , multipliziert mit der zugehörigen Komponente  $s_i$  des Einheitsvektors (siehe Gl. (21)). Man erhält dann

$$(39) \quad \omega^2 = c^2 k^2 \left[ \frac{s_1^2 + s_2^2}{\varepsilon_3} + \frac{s_3^2}{\varepsilon_1} \right].$$

Außerdem benutzt man vielfach an Stelle der Dielektrizitätskonstanten die zugehörigen Brechungsindizes. Wir folgen hier der Bezeichnung von Keller [Kel], setzen

$$(40) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= n_o^2 \\ \varepsilon_3 &= n_e^2 \end{aligned}$$

und nennen  $n_o$  den ordentlichen (ordinären),  $n_e$  den außerordentlichen (extraordinären)

Brechungsindex ( $n_o$  liest sich daher „n-Oh“, nicht „n-Null“). Als Ergebnis der Rechnung erhalten wir also zwei Phasengeschwindigkeiten bzw. zwei Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  (zur Erinnerung: die Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch  $v_{ph} = \omega/k$ , der Brechungsindex durch  $n = kc/\omega$ ). Für die Brechungsindizes gilt nach Gln. (37) und (39)

$$(41) \quad \frac{1}{n_2^2} = \frac{s_x^2 + s_y^2}{n_e^2} + \frac{s_z^2}{n_o^2}.$$

Bemerkenswert ist, dass der erste Brechungsindex  $n_1$  konstant ist und der zweite Brechungsindex  $n_2$  von der *Richtung*  $\vec{s}$  des Wellenvektors abhängt. Im Folgenden wird sich zeigen, dass den beiden Brechungsindizes zwei unterschiedlichen Wellen bzw. „Strahlen“ entsprechen. Diese werden ebenfalls mit den Adjektiven „ordentlich“ für den Strahl mit  $n_1$  und „außerordentlich“ für den Strahl mit  $n_2$  bezeichnet. Verwirrend ist dabei, dass der Brechungsindex  $n_2$  für den außerordentlichen Strahl nicht gleich dem außerordentlichen Brechungsindex  $n_e$  ist.

Die Feldstärke, die sich als Lösung des linearen Gleichungssystems Gl. (34) ergibt, lässt sich aus Gl. (18) ablesen. Fasst man die dort auftretenden Größen  $k$ ,  $c$  und  $\omega$  zum Brechungsindex  $n = kc/\omega$  zusammen und beachtet  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$  und  $\varepsilon_z = n_e^2$ , ergibt sich

$$(42) \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{s_x}{n^2 - n_o^2} \\ \frac{s_y}{n^2 - n_o^2} \\ \frac{s_z}{n^2 - n_e^2} \end{pmatrix} \frac{n^2}{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}).$$

Dabei ist nach Gl. (41) für den Brechungsindex, je nach Art des Strahls,  $n = n_1$  bzw.  $n = n_2$  zu setzen. Die Lösung gilt also für beide Arten von Strahlen (den ordentlichen bzw. außerordentlichen Strahl), allerdings nur für den Sonderfall *uniaxialer Kristalle*.

Für die Physik der Doppelbrechung sind die Verschiebungsdichten der beiden Strahlen von Bedeutung. Sie stehen nämlich senkrecht aufeinander. Das ergibt sich unmittelbar aus der „v-Notation“ der *Fresnel*-Gleichung Gl. (32). Benutzt man die Darstellung der Verschiebungsdichte nach Gl. (29) und bildet das Skalarprodukt dieser Größe für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl, so erhält man

$$(43) \quad \begin{aligned} \vec{D}_o \cdot \vec{D}_e &= \sum_i \frac{k_i^2 P_o^2 P_e^2}{(v_e^2 - v_i^2)(v_o^2 - v_i^2)} \\ &= \frac{P_o^2 P_e^2}{v_o^2 - v_e^2} \sum_i \left[ \frac{k_i^2}{v_e^2 - v_i^2} - \frac{k_i^2}{v_o^2 - v_i^2} \right] \end{aligned}$$

Die Summen auf der rechten Seite der zweiten Gleichung (eckige Klammer) sind nach *Fresnel* (Gl. (32)) Null, so dass in der Tat folgt

$$(44) \quad \vec{D}_o \cdot \vec{D}_e = 0.$$

Aus Gl. (6) ergibt sich dann, dass auch die Feldstärken der beiden Strahlen aufeinander senkrecht stehen. Denn es ist nach Gl. (6)

$$(45) \quad \begin{aligned} -\mu_o \omega_o^2 \vec{D}_o &= \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}_o) - k^2 \vec{E}_o = -k^2 \vec{E}_o, \\ -\mu_o \omega_e^2 \vec{D}_e &= \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}_e) - k^2 \vec{E}_e, \end{aligned}$$

wobei in der ersten Gleichung benutzt wurde, dass im ordentlichen Strahl Wellenvektor und Feldstärke aufeinander senkrecht stehen, also  $\vec{k} \cdot \vec{E}_o = 0$  gilt. Damit folgt

$$(46) \quad \begin{aligned} (-\mu_o \omega_o^2 \vec{D}_o) \cdot (-\mu_o \omega_e^2 \vec{D}_e) &= -k^2 \vec{E}_o \cdot (\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}_e) - k^2 \vec{E}_e) \\ 0 &= -k^2 (\vec{k} \cdot \vec{E}_o) (\vec{k} \cdot \vec{E}_e) - k^4 (\vec{E}_o \cdot \vec{E}_e) \end{aligned}$$

Wir wenden wiederum an, dass  $\vec{E}_o \perp \vec{k}$  ist, also  $\vec{k} \cdot \vec{E}_o = 0$  gilt. Damit verschwindet der erste Term auf der rechten Seite und es bleibt

$$(47) \quad 0 = -k^4 (\vec{E}_o \cdot \vec{E}_e).$$

Das heißt, das Skalarprodukt ist Null und es gilt auch für die Feldstärken von ordentlichem und außerordentlichem Strahl, dass sie aufeinander senkrecht stehen,  $\vec{E}_e \perp \vec{E}_o$ .

### 4.3 Kugelkoordinaten

Da ein uniaxialer Kristall eine einzige ausgezeichnete Achse besitzt, ist es sinnvoll, die Richtungsabhängigkeit der Wellenbewegung in seinem Innern in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  auszudrücken. Wir schreiben daher für den in Gl. (22) definierten Wellenvektor

$$(48) \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} .$$

Dabei ist  $\theta$  der Winkel zwischen der  $z$ -Achse unseres Koordinatensystems und dem Wellenvektor. Die  $z$ -Achse ist, wie oben festgelegt, auch die optische Achse oder  $c$ -Achse des Kristalls. Der Winkel  $\phi$  ist der Azimutwinkel, den die Projektion des Wellenvektors in die  $xy$ -Ebene (die Ebene senkrecht zur optischen Achse) mit der  $x$ -Achse bildet.

Mit unserer Definition des Winkels  $\theta$  folgt aus Gl. (41) für den Brechungsindex  $n_2$

$$(49) \quad \frac{1}{n_2^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

oder, wenn man die positive Wurzel nimmt,

$$(50) \quad n_2(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} .$$

Im Folgenden rechnen wir mit diesen Kugelkoordinaten weiter.

### 4.4 Feldstärke und Verschiebungsdichte im ordentlichen Strahl

Wir versuchen also jetzt, Feldstärke, Verschiebungsdichte und Poynting-Vektor der beiden Lösungen in *Kugelkoordinaten* auszudrücken – getrennt nach ordentlichem Strahl (Brechungsindex  $n_1$ ) und außerordentlichem Strahl (Brechungsindex  $n_2$ ). Eine Vektordarstellung der elektrischen Feldstärke wurde schon in Gl. (42) angegeben. Diese liefert jedoch im Fall des ordentlichen Strahls ( $n = n_1 = n_o$ ) eine Null im Nenner der  $x$ - und  $y$ -Komponente und ist daher praktisch unbrauchbar. Deshalb starten wir noch einmal weiter vorne – Gleichung (18) ist ein geeigneter Ausgangspunkt. Wir multiplizieren beide Seiten mit  $c^2/\omega^2$  und beachten, dass der Brechungsindex gegeben ist durch  $n = kc/\omega$ . Das ergibt

$$(51) \quad (\varepsilon_i - n^2)E_i = -k_i \frac{c^2}{\omega^2} (\vec{k} \cdot \vec{E}), \quad (i=1,2,3) .$$

Diese Gleichung gilt (noch) für beide Arten von Strahlen. Wenden wir sie auf den *ordentlichen* Strahl an, ist  $n^2$  gleich  $n_1^2$  ( $= n_o^2$ ) zu setzen. In diesem Fall ist für  $i = 1, 2$  die Klammer auf der linken Seite gleich Null, da auch  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  gleich  $n_o^2$  sind. Damit Gl. (51) für *alle* Richtungen des Wellenvektors gilt, muss das Skalarprodukt aus Wellenvektor und Feldstärke auf der rechten Seite ebenfalls Null sein. Das heißt, der Wellenvektor steht senkrecht auf der elektrischen Feldstärke. Für  $i = 3$  hat die Klammer auf der linken Seite den von Null verschiedenen Wert  $n_e^2 - n_o^2$ , die rechte Seite ist jedoch weiterhin Null. In diesem Fall muss daher die Feldstärkenkomponente  $E_3$  ( $= E_z$ ) verschwinden. Damit gilt für den ordentlichen Strahl

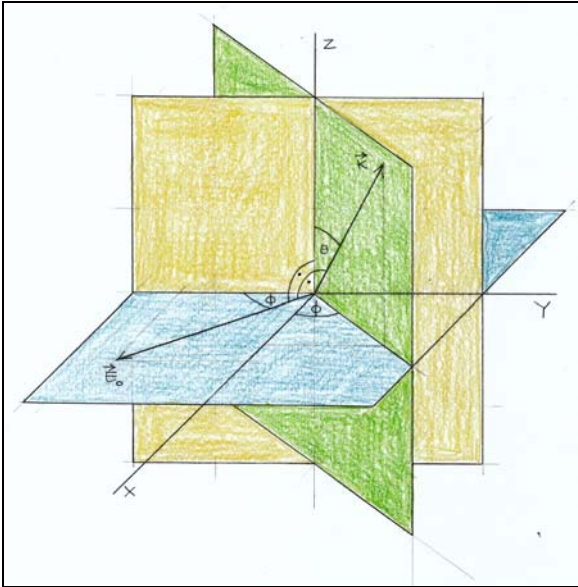
$$(52) \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\vec{k} \perp \vec{E}) \quad \text{und} \quad E_z = 0$$

und wir können die Komponenten der elektrischen Feldstärke (bis auf eine reelle Konstante) bestimmen. Das Skalarprodukt aus dem Wellenvektor (Gl. (48)) und der Feldstärke ist Null für  $E_x/E_y = -\sin \phi/\cos \phi$ , also folgt



$$(53) \quad \vec{E}_o = a_o \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $a_o$  eine reelle Konstante ist. Das bedeutet, der ordentliche Strahl ist *linear polarisiert*, sein elektrischer Vektor schwingt in der  $xy$ -Ebene – und zwar senkrecht zu der Ebene, die durch die optische Achse ( $z$ - bzw.  $c$ -Achse) und den Wellenvektor aufgespannt wird (Abb. 2).



**Abb. 2** Richtung der Feldstärke des ordentlichen Strahls. Der ordentliche Strahl ist linear polarisiert, sein elektrischer Vektor schwingt in der  $xy$ -Ebene – und zwar senkrecht zu der Ebene, die durch die optische Achse ( $z$ - bzw.  $c$ -Achse) und den Wellenvektor aufgespannt wird

Für die Verschiebungsdichte  $\vec{D}_o$  folgt aus Gl. (15), wenn man  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$  setzt,

$$(54) \quad \vec{D}_o = \varepsilon_o n_o^2 a_o \vec{E}_o.$$

Das bedeutet, Feldstärke und Verschiebungsdichte sind parallel zueinander. Für den ordentlichen Strahl gilt also

$$(55) \quad \vec{D}_o \parallel \vec{E}_o$$

und damit

$$(56) \quad \vec{k} \cdot \vec{D}_o = 0 \quad (\vec{k} \perp \vec{D}_o),$$

wie von den *Maxwellschen Gleichungen* (3) gefordert.

Aus  $\vec{D}_o \parallel \vec{E}_o$  folgt, dass der Poynting-Vektor in Richtung von  $\vec{k}$  zeigt, der Energiefluss also in Richtung des Wellenvektors erfolgt. Die Wellenfronten der Welle stehen senkrecht auf der Ausbreitungs- bzw. Strahlrichtung.

#### 4.5 Feldstärke und Verschiebungsdichte im außerordentlichen Strahl

Wir betrachten jetzt den außerordentlichen Strahl. Der Vektor der Feldstärke des außerordentlichen Strahls liegt in der Ebene, die vom Wellenvektor und der Verschiebungsdichte aufgespannt wird (Abb. 1). Das heißt, er lässt sich als Linearkombination dieser beiden Vektoren darstellen – das heißt, als

$$(57) \quad \vec{E}_e = a\vec{k} + b\vec{D}_e,$$

wobei  $a$  und  $b$  reelle Konstanten sind. Für die  $x$ - und  $y$ -Komponente der Feldstärke gilt daher

$$(58) \quad \begin{aligned} E_{ex} &= ak_x + b\varepsilon_0\varepsilon_x E_{ex} \\ E_{ey} &= ak_y + b\varepsilon_0\varepsilon_y E_{ey} \end{aligned}$$

Da in unserem Fall (uniaxialer Kristall)  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$  gilt, folgt durch Umformung und Einsetzen

$$(59) \quad \frac{E_{ex}}{E_{ey}} = \frac{k_x}{k_y} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}.$$

Aus den *Maxwellschen Gleichungen* (3), insbesondere aus  $\vec{k} \cdot \vec{D}_e = 0$ , ergibt sich

$$(60) \quad k_x\varepsilon_0\varepsilon_x E_{ex} + k_y\varepsilon_0\varepsilon_y E_{ey} + k_z\varepsilon_0\varepsilon_z E_{ez} = 0.$$

Setzt man wiederum  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$  und außerdem  $\varepsilon_z = n_e^2$ , so erhält man nach einiger Umformung

$$(61) \quad \frac{E_{ez}}{E_{ex}} = -\frac{n_o^2}{n_e^2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta \cos\phi}.$$

Die Länge des Feldstärkevektors interessiert uns nicht, wir setzen sie gleich  $a_e$  also

$$(62) \quad a_e^2 = E_{ex}^2 + E_{ey}^2 + E_{ez}^2.$$

Dann ergibt sich schließlich

$$(63) \quad \vec{E}_e = a_e \begin{pmatrix} n_e^2 \cos\theta \cos\phi \\ n_e^2 \cos\theta \sin\phi \\ -n_o^2 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt mit Gl. (15) für die Verschiebungsdichte, wenn wiederum  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$  und  $\varepsilon_z = n_e^2$  gesetzt wird,

$$(64) \quad \vec{D}_e = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \vec{E}_e = \varepsilon_0 a_e \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_e^2 \cos\theta \cos\phi \\ n_e^2 \cos\theta \sin\phi \\ -n_o^2 \sin\theta \end{pmatrix} = \varepsilon_0 a_e n_o^2 n_e^2 \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Damit liegen Feldstärke und Verschiebungsdichte in Kugelkoordinaten vor (Eine andere Möglichkeit, Gln. (63) und (64) herzuleiten, wird in Anhang B beschrieben). Wir machen die „Probe“ und verifizieren zunächst, dass Wellenvektor und Verschiebungsdichte aufeinander senkrecht stehen:

$$(65) \quad \vec{k} \cdot \vec{D}_e = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = 0 \quad (\vec{k} \perp \vec{D}_e).$$

Dann überzeugen wir uns davon, dass auch die Feldstärken und Verschiebungsdichten für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl aufeinander senkrecht stehen:

$$(66) \quad \vec{E}_e \cdot \vec{E}_o = 0 \quad \text{und} \quad \vec{D}_o \cdot \vec{D}_e = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = 0 \quad (D_o \perp D_e).$$

Wir halten nochmals fest: ordentlicher und außerordentlicher Strahl sind beide linear polarisiert, und ihre Polarisationsrichtungen *stehen senkrecht aufeinander*.

Nun zum Poynting-Vektor. Da Wellenvektor, Verschiebungsdichte, Poynting-Vektor und Feldstärke in einer Ebene liegen und paarweise aufeinander senkrecht stehen, ist der

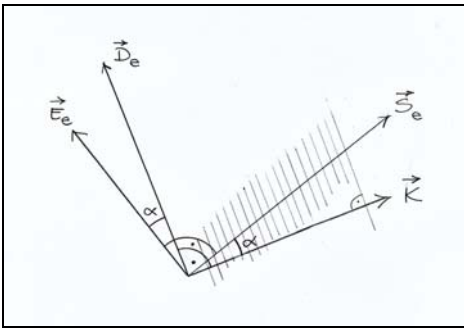


Abb. 3 Richtung der in den Rechnungen auftretenden Vektoren für den außerordentlichen Strahl. Die Wellenfronten verlaufen senkrecht zum Wellenvektor, aber schräg zur Ausbreitungsrichtung, die durch den Poynting-Vektor gegeben ist

Winkel zwischen Poynting- und Wellenvektor gleich dem Winkel zwischen Feldstärke und Verschiebungsdichte. Er wird gelegentlich *Dispersionwinkel* genannt (in der angelsächsischen Literatur *walk-off angle*), wir bezeichnen ihn mit  $\alpha$ . Abbildung 3 veranschaulicht die Situation: Die Welle breitet sich in Richtung des Poynting-Vektors aus, ihre Wellenfronten stehen jedoch senkrecht auf dem Wellenvektor. Sie verlaufen daher schräg zur Ausbreitungsrichtung. Für den Winkel  $\alpha$  gilt

$$(67) \quad \tan \alpha = \frac{|\vec{E}_e \times \vec{D}_e|}{\vec{E}_e \cdot \vec{D}_e}.$$

Mit Hilfe der Gln. (71) und (72) folgt daraus

$$(68) \quad \tan \alpha = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \cos \theta \sin \theta}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta} = \frac{\tan \theta - \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta}{1 + \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan^2 \theta}.$$

Das lässt sich trigonometrisch mit Hilfe von

$$(69) \quad \arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$$

umformen zu

$$(70) \quad \alpha = \theta - \arctan \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta \right).$$

Da die Brechungsindizes  $n_o$  und  $n_e$  verschieden sind, ist  $\alpha$  in der Regel ungleich Null. Das heißt, dass sich die Welle in der Tat „schräg“ zu ihren Wellenfronten ausbreitet. Nur in den Grenzfällen  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi/2$  ist  $\alpha$  gleich Null (genauer: für  $\theta \rightarrow \pi/2$  strebt  $\alpha$  gegen Null).

## 5. Sonderfälle

### 5.1 Strahl in Richtung der optischen Achse

Wir wenden jetzt unsere Ergebnisse auf die beiden schon erwähnten Sonderfälle an, (1)  $\theta = 0$  und (2)  $\theta = \pi/2$ . Zunächst zum Fall  $\theta = 0$ . Dabei zeigt der Wellenvektor in Richtung der optischen Achse, also ist

$$(71) \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Feldstärke des ordentlichen Strahls ist weiterhin gegeben durch Gl. (53), die des außerordentlichen Strahls wird nach Gl. (63) zu

$$(72) \quad \vec{E}_e = a_e \begin{pmatrix} n_e^2 \cos \phi \\ n_e^2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit liegen die Feldstärkevektoren des ordentlichen und außerordentlichen Strahls beide in der  $xy$ -Ebene (die  $z$ -Komponenten beider Feldstärken sind Null) und stehen wegen

$$(73) \quad \vec{E}_o \cdot \vec{E}_e = 0$$

senkrecht aufeinander. Der Brechungsindex für den ordentlichen Strahl ist, wie schon erwähnt, unabhängig von  $\theta$ , und hat auch in diesem Sonderfall den Wert  $n_1 = n_o$ . Bemerkenswert ist, dass derselbe Wert auch für den außerordentlichen Strahl gilt. Gleichung (50) ergibt nämlich

$$(74) \quad n_2(\theta = 0) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos 0 + n_o^2 \sin 0}} = n_o.$$

Das heißt, ordentlicher und außerordentlicher Strahl bewegen sich mit demselben Brechungsindex und haben damit gleiche Phasengeschwindigkeit  $c/n_o$ . Aus Gl. (70) ergibt sich weiterhin, dass der Winkel  $\alpha$  gleich Null ist. Der außerordentliche Strahl breitet sich also, wie der ordentliche, senkrecht zu seinen Wellenfronten aus. Daraus ergibt sich, dass beide Strahlen ununterscheidbar sind. Mit anderen Worten, der Kristall verhält sich in diesem Fall wie ein isotropes Medium.

## 5.2 Strahl senkrecht zur Richtung der optischen Achse

Im Fall  $\theta = \pi/2$  steht der Wellenvektor senkrecht zur optischen Achse des Kristalls. Nach Gl. (48) ist dann

$$(75) \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auch hier stellt Gl. (41) die Feldstärke des ordentlichen Strahls dar. Für die entsprechend Größe des außerordentlichen Strahls folgt aus Gl. (63)

$$(76) \quad \vec{E}_e = a_e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n_o^2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich, dass das Skalarprodukt der beiden Feldstärken, wie im vorherigen Sonderfall, verschwindet. Die Feldstärkevektoren von ordentlichem und außerordentlichem Strahl stehen also auch hier senkrecht aufeinander. Den beiden Sonderfällen ist weiterhin gemeinsam, dass der Winkel  $\alpha$  gleich Null ist (Gl. (70)). Das heißt, beide Strahlen bewegen sich wiederum in derselben Richtung. Der entscheidende Unterschied zum Fall  $\theta = 0$  besteht darin, dass die Brechungsindizes für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl voneinander abweichen: der Brechungsindex des ordentlichen Strahls ist, wie bisher,  $n_o$ . Der des außerordentlichen Strahls ergibt sich zu

$$(77) \quad n_2(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos(\pi/2) + n_o^2 \sin(\pi/2)}} = n_e.$$

Das bedeutet, dass sich beide Strahlen zwar in derselben Richtung, aber mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten bewegen – der ordentliche Strahl mit  $c/n_o$ , der außerordentliche mit  $c/n_e$ .

Dadurch entsteht längs des Strahlweges eine Phasendifferenz  $\Delta(kd)$ , die proportional zur Weglänge  $d$  anwächst und gegeben ist durch

$$(78) \quad \Delta(kd) = \frac{\omega}{c} d (n_e - n_o).$$

Oft steht man vor der Aufgabe, eine vorgegebene Phasendifferenz zu erzeugen, beispielsweise  $\Delta(kd) = \pi/2$ . Die dafür benötigte Weglänge (= Dicke des Mediums) beträgt  $d = \lambda/4(n_e - n_o)$ . Kristallscheibchen mit dieser Dicke nennt man  $\lambda/4$ -Plättchen.

### 5.3 Strahl mit maximalem Dispersionswinkel

Der Term auf der rechten Seite von Gl. (68) ist eine Funktion des Winkels  $\theta$  mit genau einem Maximum im Intervall  $[0; \pi/2]$ . Es liegt an der Stelle  $\theta_{\max}$ , die durch

$$(79) \quad \theta_{\max} = \arctan \frac{n_e}{n_o}$$

gegeben ist (Herleitung im Anhang C). Setzt man diesen Wert in Gl. (70) ein, d. h., in den Term für den Winkel  $\alpha$ , erhält man

$$(80) \quad \alpha_{\max} = \arctan \frac{n_e}{n_o} - \arctan \frac{n_o}{n_e}$$

und, nach Umformung (ebenfalls im Anhang C)

$$(81) \quad \alpha_{\max} = \arctan \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_o n_e}.$$

In den Datenblättern von Kristallen, die in der Optik Verwendung finden, wird neben den Werten von  $n_o$  und  $n_e$  (bei einer bestimmten Wellenlänge) oft auch der Wert von  $\alpha$  für  $\theta = 45^\circ$  angegeben. Für diesen gilt

$$(82) \quad \alpha(\theta = 45^\circ) = \arctan \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2}.$$

## 6. Zahlenwerte für Kalkspat (Kalzit)

Die Abhängigkeit der Brechungsindizes  $n_o$  und  $n_e$  von der Wellenlänge  $\lambda$  wird in der Literatur durch empirische Interpolationsformeln, die so genannten *Sellmeier*-Gleichungen angegeben. Für *Kalzit* lauten diese Gleichungen (z. B. [UOptc])

$$n_o^2 = 2,69705 + \frac{0,0192064}{\lambda^2 - 0,01820} - 0,0151624 \lambda^2$$

$$n_e^2 = 2,18438 + \frac{0,0087309}{\lambda^2 - 0,01018} - 0,0024411 \lambda^2$$

Sie liefern für  $\lambda = 630$  nm (*He-Ne*-Laser) die Werte

$$n_o = 1,65582 \quad \text{und} \quad n_e = 1,48526.$$

Setzt man diese in Gl. (79) ein, erhält man  $\theta_{\max} = 41,9^\circ$  und nach Gl. (81) als maximalen Dispersionswinkel  $\alpha_{\max} = 6,2^\circ$ .

Der Zahlenwert  $6,2^\circ$  wird beispielsweise von Gross angegeben (Abb. 3.23 in [Gro]) – dort fehlt jedoch der zugehörige Winkel  $\theta$ . Der Winkel  $\alpha$  für  $\theta = 45^\circ$  (Gl. (82)) hat im Übrigen auch den Wert  $\alpha = 6,2^\circ$ .

## Literatur

- Gro R. Gross, Lecture Notes, Walther Meißner Institut, Technische Universität München,  
Gross\_Physik\_III\_Kap\_3.pdf
- Kel Chr. U. Keller, Lecture 3: Crystal Optics  
CUK\_L03\_handout.pdf  
[home.strw.leidenuniv.nl](http://home.strw.leidenuniv.nl)
- MirG A. Mirlin und I. Gornyi, Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13  
TheoCWS12m13v2.pdf, Blatt 13 Musterlösungen, Bonusaufgabe
- UOptc Union Optik, [www.u-optic.com/gid\\_530\\_prdid\\_562\\_pid\\_583\\_1\\_3](http://www.u-optic.com/gid_530_prdid_562_pid_583_1_3)

## Anhang A

Berechnung von  $\det(\underline{M})$ , Gl. (36)

Die Determinante der Matrix Gl. (35)

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k^2 & k_2 k_3 \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 - k^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_2^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & -k_1^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 & k_2 k_3 \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & -k_1^2 - k_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

lässt sich m. E. am bequemsten berechnen, indem man sie in ihre Unterdeterminanten entwickelt, also schreibt

$$\det(\underline{M}) = k_1 k_3 \begin{vmatrix} k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ -k_1^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 & k_2 k_3 \end{vmatrix} - k_2 k_3 \begin{vmatrix} -k_2^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & k_2 k_3 \end{vmatrix} \\ + (-k_1^2 - k_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3) \begin{vmatrix} -k_2^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & -k_1^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \end{vmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \det(\underline{M}) &= k_1 k_3 \left[ k_1 k_2^2 k_3 - (-k_1^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1) k_1 k_3 \right] \\ &\quad - k_2 k_3 \left[ (-k_2^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1) k_2 k_3 - k_1^2 k_2 k_3 \right] \\ &\quad + (-k_1^2 - k_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3) \left[ (-k_2^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1)(-k_1^2 - k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1) - k_1^2 k_2^2 \right] \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren, geschicktes Zusammenfassen und unter Beachtung von

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

erhält man

$$\begin{aligned} \det(\underline{M}) &= -\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) (k_1^2 + k_2^2) k_3^2 \\ &\quad + \left(-k^2 + k_3^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3\right) \left[ \left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) + k_1^2\right) \left(\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) + k_2^2\right) - k_1^2 k_2^2 \right] \\ &= -\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) (k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2) - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2 + k_1^2 + k_2^2\right] \left(k^2 - k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3\right) \\ &= -\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2 + k_1^2 + k_2^2\right) \left(k^2 - k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3\right) + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2\right] \\ &= -\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) \left(k^2 - k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3\right) + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2 - (k_1^2 + k_2^2) \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3\right] \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2\right) \left[k^2 \varepsilon_1 - k_3^2 \varepsilon_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + k^2 \varepsilon_3 - k_1^2 \varepsilon_3 - k_2^2 \varepsilon_3\right] \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1\right) \left[\varepsilon_1 (k^2 - k_3^2) + \varepsilon_3 \left(k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1\right)\right] \end{aligned}$$

Damit wird schließlich

$$c^6 \det(\underline{M}) = \omega^2 (c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon_1) [c^2 (k_1^2 + k_2^2) \varepsilon_1 + (c^2 k_3^2 - \omega^2 \varepsilon_1) \varepsilon_3],$$

wie in Gl. (36) angegeben.

## Anhang B

Kugelkoordinaten-Darstellung von Feldstärke und Verschiebungsdichte für den außerordentlichen Strahl (Gleichungen (63) und (64))

Wir gehen davon aus, dass für den ordentlichen Strahl gilt

$$\vec{D}_o = \varepsilon_0 n_o^2 \vec{E}_o$$

mit der Komponentendarstellung von  $\vec{E}_o$  nach Gl. (53). Das liefert uns

$$\vec{D}_o = \varepsilon_0 n_o^2 \vec{E}_o = \varepsilon_0 n_o^2 a_o \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann nutzen wir aus, dass die Verschiebungsdichten für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl senkrecht aufeinander stehen – das heißt, dass deren Skalarprodukt verschwindet (Gl. (44)), also gilt

$$\vec{D}_e \cdot \vec{D}_o = 0.$$

Das heißt ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} D_{ex} \\ D_{ey} \\ D_{ez} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und liefert

$$\frac{D_{ex}}{D_{ey}} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}.$$

Aus den *Maxwellschen Gleichungen* (3) folgt weiterhin  $\vec{k} \cdot \vec{D}_e = 0$ , also

$$k_x D_{ex} + k_y D_{ey} + k_z D_{ez} = 0.$$

Mit den Komponenten des Wellenvektors nach Gl. (48) und der gerade hergeleiteten Beziehung zwischen  $D_{ex}$  und  $D_{ey}$  ergibt sich dann nach einigen Umformungen

$$\frac{D_{ez}}{D_{ex}} = -\frac{\sin \theta}{\cos \phi \cos \theta}.$$

Die Länge des Vektors der Verschiebungsdichte interessiert uns auch hierbei nicht. Wir setzen sie gleich  $\varepsilon_0 a_e n_o^2 n_e^2$ , um nicht von unserer bisher benutzten Notation abzuweichen. Das heißt, wir bestimmen die dritte Komponente der Verschiebungsdichte mit Hilfe von

$$(\varepsilon_0 a_e n_o^2 n_e^2)^2 = D_{ex}^2 + D_{ey}^2 + D_{ez}^2.$$

Dann erhalten wir

$$\vec{D}_e = \varepsilon_0 a_e n_o^2 n_e^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

wie in Gl. (64) angegeben. Für die Feldstärke folgt mit dem reziproken Dielektrizitätstensor  $\varepsilon^{-1}$

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{pmatrix}$$

der Term

$$\vec{E}_e = \frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{pmatrix} \vec{D}_e$$

und damit

$$\vec{E}_e = a_e \begin{pmatrix} n_e^2 \cos \theta \cos \phi \\ n_e^2 \cos \theta \sin \phi \\ -n_o^2 \sin \theta \end{pmatrix},$$

also der Feldstärkevektor in Gl. (63).



## Anhang C

Berechnung des maximalen Dispersionswinkels  $\alpha_{\max}$  (Gleichung (81))

Wir gehen aus von Gl. (68)

$$\tan \alpha = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \cos \theta \sin \theta}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}.$$

Deren rechte Seite ist, abgesehen von dem Faktor  $n_e^2 - n_o^2$ , eine Funktion des Winkels  $\theta$ . Sei also

$$f(\theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}.$$

Die erste Ableitung von  $f$  lautet

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \sin \theta \cos \theta \cdot 2(-n_e^2 + n_o^2) \cos \theta \sin \theta}{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)^2} \\ &= \frac{-n_o^2 \sin^4 \theta + n_e^2 \cos^4 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - n_o^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)^2} \\ &= \frac{n_e^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - n_o^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)^2} \\ &= \frac{n_e^2 \cos^2 \theta - n_o^2 \sin^2 \theta}{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)^2} \end{aligned}$$

Da der Nenner von  $f'(\theta)$  für alle Werte  $\theta$  ungleich Null ist, gilt für die Nullstelle der Ableitung

$$n_e^2 \cos^2 \theta - n_o^2 \sin^2 \theta = 0 \quad \text{oder} \quad \tan \theta = \frac{n_e}{n_o}.$$

Da außerdem gilt

$f'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \tan \theta < n_e/n_o$  und  $f'(\theta) < 0 \Leftrightarrow \tan \theta > n_e/n_o$ , wechselt die Ableitung an der Stelle  $\tan \theta = n_e/n_o$  ihr Vorzeichen von Plus nach Minus. Damit liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum vor. Der Tangens des Winkels  $\alpha$  (Gl. (68)) wird also für

$$\theta_{\max} = \arctan \frac{n_e}{n_o}$$

maximal. Der Wert von  $\alpha$  an dieser Stelle ist

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \theta_{\max} - \arctan \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \left( \arctan \frac{n_e}{n_o} \right) \right) \\ &= \arctan \frac{n_e}{n_o} - \arctan \frac{n_o}{n_e} \\ &= \arctan \frac{\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e}}{1 - \frac{n_e}{n_o} \cdot \frac{n_o}{n_e}} \\ &= \arctan \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e n_o} \end{aligned}$$

Die Randwerte von  $\alpha$  wurden schon im Anschluss an Gl. (70) genannt: Für  $\theta = 0$  ist  $\alpha$  gleich Null und für  $\theta \rightarrow \pi/2$  strebt  $\alpha$  gegen Null. Damit ist

$$\alpha_{\max} = \arctan \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_e n_o}$$

(Gl. (81)) auch globales Maximum.