

Bragg-Reflexion von cm-Wellen

In ein Holzbrett werden an den Gitterpunkten eines quadratischen Gitters Eisennägel eingeschlagen, senkrecht zur Holzoberfläche. Aufgrund der regelmäßigen Anordnung der Nägel entsteht so das Modell eines zweidimensionalen Kristalls. Dieser Nagel-„Kristall“ wird von der Seite mit einem Parallelbündel von *cm*-Wellen bestrahlt, die ein *HF*-Sender über einen Hornstrahler aussendet. Die *HF*-Strahlung versetzt die Elektronen in den Nägeln in Schwingungen, so dass die Nägel zu Antennen werden und ihrerseits Strahlung aussenden. Diese Strahlung wird gleichmäßig nach allen Seiten emittiert. Durch Interferenz zwischen den Wellenzügen, die von den einzelnen Nägeln ausgehen, kommt es bei einigen Einfallswinkeln der *HF*-Welle dazu, dass der „Kristall“ als Ganzes wie ein Spiegel wirkt und einen Teil der Strahlung reflektiert. Das Phänomen ist als *Bragg-Reflexion* bekannt. Die betreffenden Winkel heißen *Glanzwinkel*. Sie lassen sich berechnen, indem man fordert, dass Wellenzüge, die von parallelen Nagelreihen nach dem Reflexionsgesetz der Optik reflektiert werden, konstruktiv interferieren. Die dazu infrage kommenden Nagelreihen heißen *Netzebenen*¹. Man erkennt sie, wenn man den „Kristall“ von der Seite betrachtet und den Kopf dabei um diesen herum bewegt. Es gibt Blickrichtungen, bei denen sich die Nägel hintereinander aufreihen, und zwar so, dass die Nagelreihen gleichen Abstand voneinander haben. Das ist der Blick entlang einer Schar von Netzebenen. Die reflektierte Strahlung lässt sich mit einer (*HF*-) Diode im Fokus einer zweiten Hornantenne empfangen. Das Signal wird durch die Diode gleichgerichtet, durchläuft einen Tiefpass und wird schließlich in einem Verstärker auf einen Pegel angehoben, der zum Ansteuern eines Drehspulgeräts (100 μ A) ausreicht. Das Experiment ist ein Modellversuch für die *Bragg*-Reflexion von Lichtwellen an dreidimensionalen Kristallen.

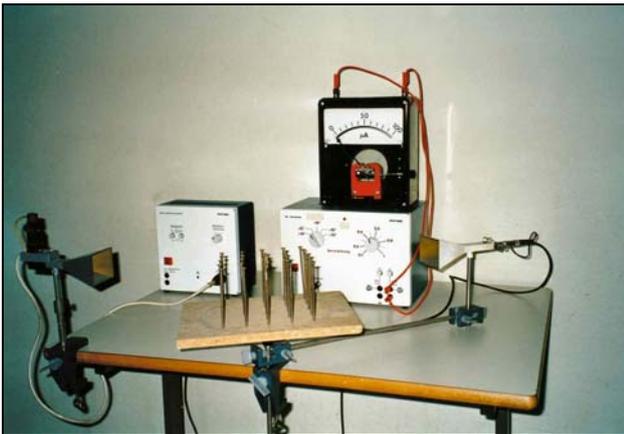


Abbildung 1 Messanordnung

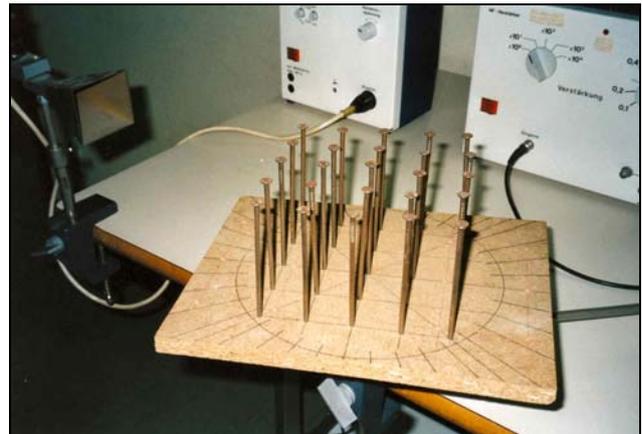


Abbildung 2 "Kristall" aus 5x5 Eisennägeln

Abbildungen 1 und 2 zeigen den Aufbau meiner Messanordnung. Das Horn in der linken Bildhälfte von Abbildung 1 ist die Antenne des *HF*-Senders, die Hornantenne rechts vom Nagelbrett enthält die *HF*-Diode des Empfängers². Der Sender arbeitet bei einer Frequenz von 9,45 GHz, entsprechend einer Wellenlänge von 3,18 cm. Der „Kristall“ (Abbildung 2) besteht aus 25 etwa 12 cm langen Eisennägeln, angeordnet als quadratisches Gitter mit der Maschenbreite $a = 4$ cm. Die Holzplatte, in der die Nägel stecken, lässt sich um eine vertikale Achse durch ihren Mittelpunkt drehen. Dazu dient ein kurzer Stab aus Stativmaterial an ihrer Unterseite, der in einer Drehmuffe gelagert ist. Derselbe Stab dient auch als Drehachse für einen Arm (ebenfalls aus Stativmaterial), an dessen Ende sich die Hornantenne des Empfängers befindet. Holzplatte und Empfängerantenne können so unabhängig voneinander um die beschriebene Achse gedreht werden. Bei der Suche nach den *Bragg*-Reflexen ist es sinnvoll, das Nagelbrett zunächst so auszurichten, dass die *HF*-Welle unter dem „richtigen“ Winkel relativ zur Orientierung der Nagelreihen einfällt. Dieser Winkel – er werde α genannt – lässt sich berechnen, siehe Gl. (7) weiter unten. Danach sucht man durch Herumschwenken der Empfängerantenne den Winkel maximaler Intensität.

Der Winkel, den einfallender und reflektierter Strahl im Fall eines Reflexes mit den *Netzebenen*

bilden (*Glanzwinkel*), sei mit θ bezeichnet. Zur Berechnung von θ machen wir von der oben genannten Vorstellung Gebrauch, dass ein Reflex durch konstruktive Interferenz entsteht – und zwar durch Interferenz der Wellenzüge, die von den Netzebenen nach dem Reflexionsgesetz der Optik *reflektiert* werden. In Abbildung 3 sind zwei dieser Wellenzüge („1“ bzw. „2“) eingezeichnet. Wir setzen voraus, dass in großer Entfernung vom Kristall beobachtet wird. Dann sind die zum Beobachter verlaufenden Strahlen parallel (*Fraunhofersche* Beobachtung) und der Gangunterschied Δs zwischen diesen Wellenzügen ist gegeben durch

$$(1) \quad \Delta s = 2d \sin \theta.$$

Dabei ist d der Abstand der beiden Netzebenen. Konstruktive Interferenz erfordert, dass dieser Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist, also

$$(2) \quad \Delta s = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt als Bedingung für die Intensitätsmaxima

$$(3) \quad 2d \sin \theta = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(*Braggsche Gleichung*). Man beachte, dass die Netzebenen wegen der Reflexionsbedingung sowohl mit dem einfallenden als auch mit dem reflektierten Strahl den Winkel θ bilden (Abbildung 3).

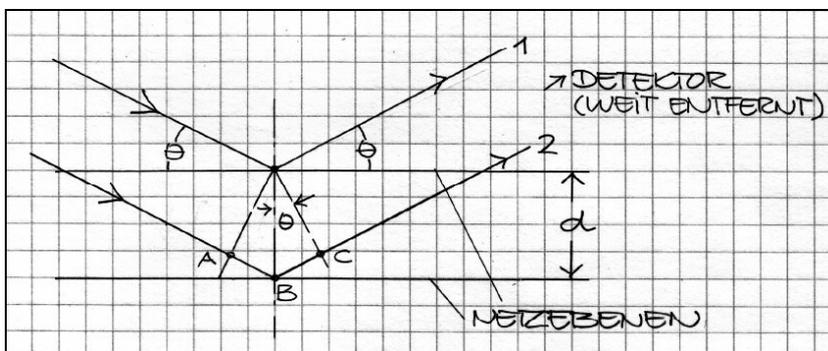


Abbildung 3 Reflexion an Netzebenenscharen

Da wir ausreichende Intensität nur für Reflexe erster Ordnung erwarten, können wir uns in Gl. (3) auf $n = 1$ beschränken. In diesem Fall folgt aus Gl. (3)

$$(4) \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{2d}.$$

Die linke Seite ist damit für alle Werte von θ kleiner als Eins. Daraus folgt

$$(5) \quad \frac{\lambda}{2d} \leq 1 \quad \text{oder} \quad d \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Das heißt, in erster Ordnung tragen nur Netzebenen zu Reflexen bei, deren Abstand d größer ist als die Hälfte der Wellenlänge, nämlich 1,6 cm. In unserem Fall sind das die drei Netzebenen, die in der Tabelle aufgeführt sind. Sie sind mit ihren *Millerschen Indizes* hkl bezeichnet³ – wobei der letzte Index (l) wegen unseres nur zweidimensionalen Gitters für alle Ebenen Null (und unerheblich) ist. Mit dieser Bezeichnung sind es die Ebenen 100, 110 und 210. Ihre Lage und Orientierung im „Kristall“ ist in Abbildung 4 dargestellt.

Die von diesen Ebenen ausgehenden Reflexe (Spalte 1 der Tabelle) sind in gleicher Weise gekennzeichnet. Die Abstände der zugehörigen Netzebenen berechnen sich nach der Formel

$$(6) \quad d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

In unseren Fall ergeben sich folgende Werte: $d_{100} = a$, $d_{110} = a/\sqrt{2}$ und $d_{210} = a/\sqrt{5}$ (Spalte 2 der Tabelle). In Spalte 3 sind die nach Gl. (3) mit $\lambda = 3,18$ cm berechneten Glanzwinkel aufgeführt,

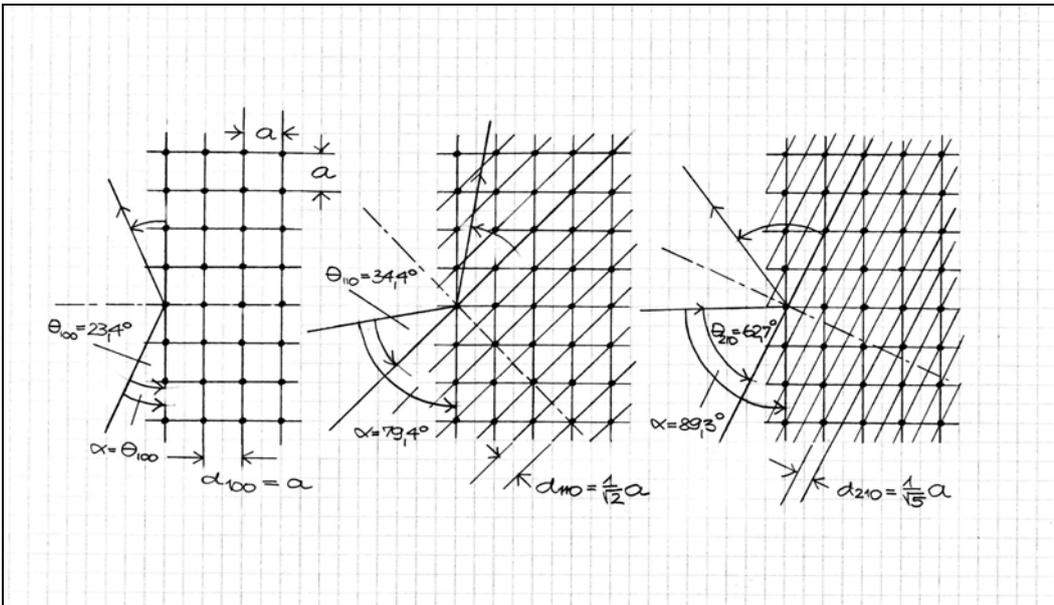


Abbildung 4 Netzebenen im Nagel-"Kristall"

und in Spalte 4 der Winkel α zwischen Einfallsrichtung der Welle und der 100-Netzebene der Nagelreihen. Eine einfache geometrische Überlegung ergibt

$$(7) \quad \alpha = \theta + \arctan\left(\frac{k}{h}\right).$$

Dieser Winkel ist für das Verständnis des Experiments unerheblich. Er dient aber als Anhaltspunkt bei der Justierung des Nagelbretts. Das heißt, bei der Suche nach Reflexen wurde dieses so ausgerichtet, dass die Achse der Senderantenne und die 100-Ebene den Winkel α einschlossen. Dann wurde die Hornantenne des Empfängers, wie schon beschrieben, um die Achse des Nagelbretts in kleinen Winkelschritten herumgeschwenkt und dabei die Intensität der empfangenen 9,45 GHz-Strahlung gemessen. Der Winkel der Empfängerantenne wurde von der Vorwärtsrichtung aus gemessen, er wird hier mit ϕ bezeichnet (Im Teilchenbild hieße er Ablenk- oder Streuwinkel). Liegt ein Reflex vor, ist der entsprechende Winkel ϕ_{reflex} das Doppelte des Bragg-Winkels θ_{Bragg} :

$$(8) \quad \theta_{\text{Bragg}} = \frac{\phi_{\text{reflex}}}{2}$$

Abbildung 5 zeigt eine schematische Skizze der Messanordnung.

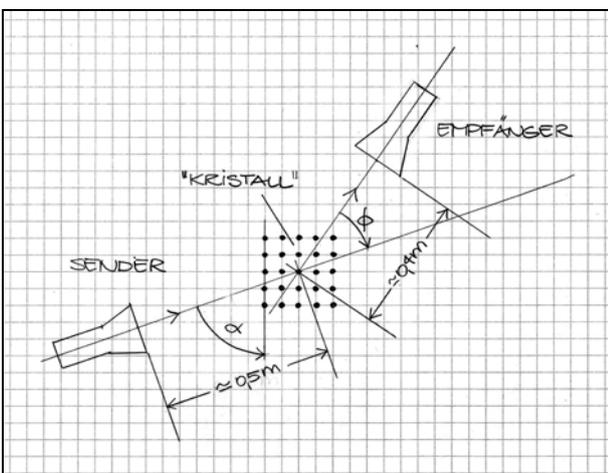


Abbildung 5 Versuchsanordnung schematisch. Der Kristall wurde so justiert, dass die Strahlrichtung des Senders mit den 100-Nagelreihen den nach Gl. (7) berechneten Winkel α bildete. Dann wurde der Empfänger um den Kristall schrittweise herumgeschwenkt und die Intensität des gestreuten Strahls als Funktion des Streuwinkels ϕ gemessen.

Experimentell wurden die theoretisch berechneten Reflexe auch tatsächlich gefunden. Abbildung 6 zeigt als Beispiel den 100-Reflex der Messung 1979/2. Aufgetragen ist die vom Empfänger registrierte Intensität als Funktion des Streuwinkels ϕ . Die Halbwertsbreite der Intensitätsverteilung ist etwa 5° und entspricht recht gut dem Wert, den man aus den Diagrammen der Lehrmittelhersteller für die benutzten Hornstrahler entnimmt⁴. Da auch der „Untergrund“, also die Strahlungsintensität ohne Nagel-„Kristall“ gemessen wurde und dieser absolut flach war, kann man davon ausgehen, dass die glockenförmigen Gebiete erhöhter Intensität in der Tat Reflexe sind, die vom Nagel-„Kristall“ herrühren.

Tabelle Berechnete und beobachtete *Bragg*-Reflexe für ein quadratisches Gitter aus Eisennägeln (Seitenlänge $a = 4$ cm). Der Fehler der experimentell bestimmten Werte von θ beträgt etwa $\pm 2^\circ$.

Reflex <i>hkl</i>	d_{hkl} [cm]	θ_{theor}	α	$\theta_{\text{experimentell}}$					
				1979/1	1979/2	1991/1	1991/2	2006	Mittel
100	4,00	23,4°	23,4°	22,2°	23,3°	21,5°	24,7°	21,1°	22,6° \pm 2°
110	2,83	34,4°	79,4°	33,5°	33,5°	35,0°	36,0°	34,4°	34,5° \pm 2°
210	1,79	62,7°	89,3°	63,0°	64,5°	63,0°	66,0°	65,5°	64,4° \pm 4°

Die von mir experimentell gefundenen Glanzwinkel sind in der Tabelle aufgeführt. Gemessen wurden sie über mehrere Jahre hinweg und in unterschiedlicher Umgebung. Da die Ergebnisse

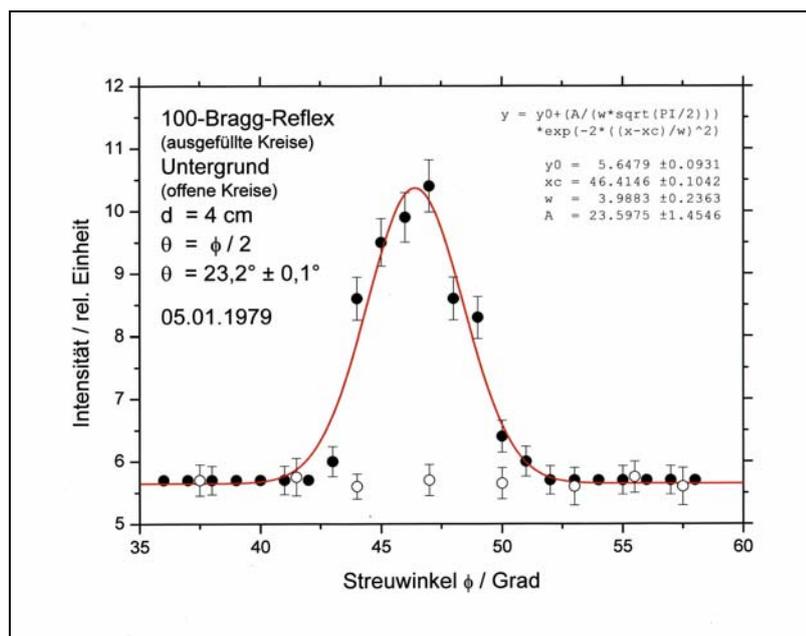


Abbildung 6 Bragg-Reflex 100 und Untergrund

innerhalb der Fehlergrenzen ($\pm 2^\circ$) übereinstimmen, ist es unwahrscheinlich, dass Justierfehler und Reflexionen an Wänden oder Metallflächen in der Nähe der Apparatur große systematische Fehler verursachten. Aus den Mittelwerten der Glanzwinkel (letzte Spalte der Tabelle) lassen sich die Abstände d der Netzebenen berechnen. Sie sind

$$d_{100} = 4,14 \pm 0,37 \text{ cm,}$$

$$d_{110} = 2,81 \pm 0,16 \text{ cm,}$$

$$d_{210} = 1,76 \pm 0,11 \text{ cm}$$

und stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit den theoretischen (Tabelle, Spalte 2) überein. Das heißt, die beobachteten Intensitätsmaxima sind mit großer Sicherheit *Bragg*-Reflexe.

Ich will nicht verschweigen, dass bei genauerer Beobachtung außer den drei untersuchten Reflexen auch solche auftraten, deren Lage und/oder Ursache unklar sind. Abbildung 7 beispielsweise zeigt eine (halb automatische) Aufnahme der vom Empfänger registrierten Intensität über einen großen Bereich von Streuwinkeln. Bei ihr wurden die Winkel mit einem Drehpotentiometer abgetastet und die Intensitätswerte in einem Datenlogger gespeichert (Messung 2006 der Tabelle). Der Einfallswinkel betrug $\alpha = 23^\circ$. In der Abbildung erkennt man links im Diagramm den Peak,

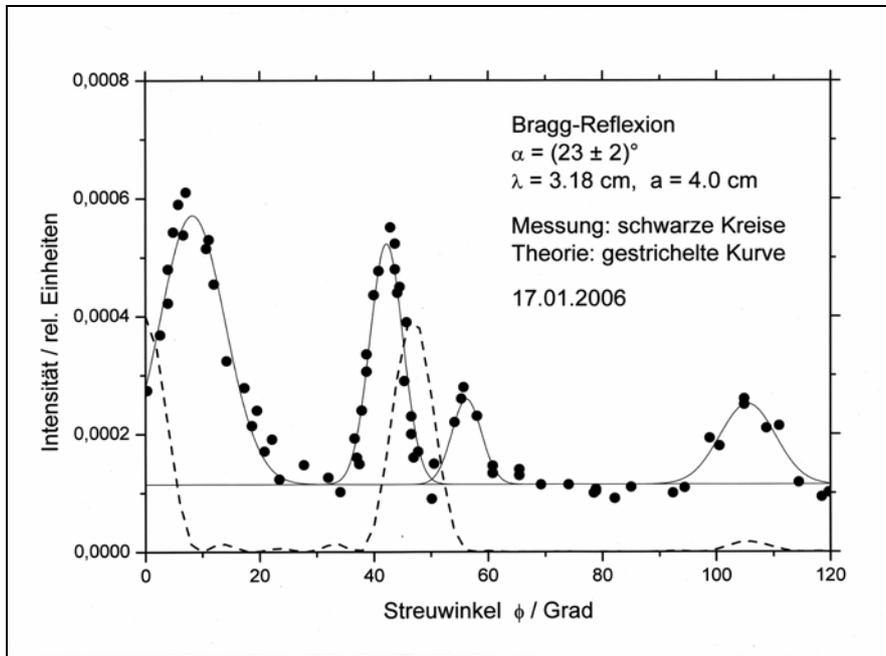


Abbildung 7 Intensitätsverteilung für den Einfallswinkel $\alpha = 23,4^\circ$. An die Messpunkte (gefüllte Kreise) wurden vier Gausskurven und ein konstanter Untergrund angepasst. Die gestrichelte Kurve ist das Ergebnis einer Rechnung, siehe Text. Im Fall eines Reflexes ist der Bragg-Winkel θ gleich der Hälfte des Streuwinkels ϕ . Dem Peak, der von den Messpunkten bei $\phi = 42^\circ$ gebildet wird, entspricht daher ein Bragg-Reflex bei $\theta = 21^\circ$. Dieser kann einer Reflexion an den 100-Netzebenen zugeordnet werden.

der offenbar der nicht gestreuten Welle entspricht – allerdings nicht bei $\phi = 0^\circ$, sondern um etwa 8° versetzt. Diese Abweichung könnte man dadurch erklären, dass eine der beiden (oder beide) Antennen „schielen“. Dann aber müsste auch der 100-Reflex um etwa den gleichen Winkel vom berechneten Wert $\phi = 46,8^\circ$ ($\theta = 23,4^\circ$) abweichen. Das ist jedoch nicht der Fall: Wie die Abbildung zeigt, wird dieser Reflex bei $\phi = 42,2^\circ \pm 2^\circ$ ($\theta = 21,1^\circ$) beobachtet und ist mit dem theoretischen Wert (noch) verträglich. Weiterhin ist unerklärbar, warum für $\alpha = 23^\circ$ außer dem 0° -Peak und dem 100-Reflex zwei weitere Reflexe geringerer Intensität sichtbar sind, und zwar bei $\phi = 56^\circ$ und $\phi = 105^\circ$.

Die gestrichelte Kurve in Abbildung 7 ist das Ergebnis einer theoretischen Rechnung, bei der die Feldstärken, die von den 25 Nägeln ausgehen und sich am Ort des Empfängers überlagern, phasenrichtig addiert wurden. Dabei wurde angenommen, dass jeder Nagel mit derselben Amplitude strahlt und die Richtung zum Empfänger für alle Nägel gleich ist (Fraunhoferscher Bereich⁵, Beobachter weit entfernt vom „Kristall“). Für jeden Nagel wurde der Gangunterschied s bezüglich eines Referenznagels berechnet, anschließend wurden die Phasenfaktoren $\exp(-i2\pi s/\lambda)$ aller Nägel addiert und das Betragsquadrat der Summe auf Eins in Vorwärtsrichtung normiert (Maple-Programm im Anhang).

Der Vergleich mit der Messung ist ernüchternd. Er zeigt aber, dass auch eine Streuphasenrechnung Reflexe liefert – selbst wenn die berechneten Winkel nicht genau mit den theoretischen

übereinstimmen: Der 100-Reflex sollte laut Rechnung bei $\phi = 48^\circ$ liegen, wird aber bei $\phi = 42,2^\circ \pm 2^\circ$ beobachtet. Erstaunlich ist, dass die Rechnung das beobachtete Maximum bei $\phi = 105^\circ$ liefert. Das bei $\phi = 56^\circ$ in der Messung auftretende Maximum wird durch die Rechnung nicht bestätigt, es könnte durch eine Nebenkeule der Sende- oder Empfangsantenne hervorgerufen werden.

Fazit: Das Prinzip der *Bragg*-Reflexion lässt mit Hilfe einer *cm*-Wellenapparatur an dem vorliegenden Modell-Kristall aus Eisennägeln gut demonstrieren. Das (zum Teil) selbst gestrickte Experiment liefert auch quantitativ sinnvolle Ergebnisse. Weitere Untersuchungen wären aber nötig, um Details zu erklären.

Anmerkungen

- ¹ Die Netzebenen sind eigentlich (Netz-)Reihen, da unser „Kristall“ nur zweidimensional ist.
- ² Das Versuchsmaterial bestand, abgesehen vom Nagel-„Kristall“, aus den üblichen von der Lehrmittelindustrie gelieferten Geräten einer (Schul-)Physiksammlung.
- ³ Man muss die Netzebenenscharen nicht mit den *Millerschen Indizes* kennzeichnen, und die zugehörigen Abstände lassen sich auch ohne Gl. (6) berechnen. Aus Abbildung 4 geht hervor, wie sie sich ohne Kenntnis von *hkl* aus der Geometrie ergeben (mit Hilfe des Satzes von Pythagoras).
- ⁴ z. B. Versuchsanleitung der Firma *Phywe*: Radiation Field of a Horn Antenna / Microwaves, *LEP* 4.5.08
- ⁵ Ob man wirklich im Fraunhoferbereich beobachtet, ist fraglich. Andererseits wird dies schon bei der Herleitung von Gl. (3) vorausgesetzt.

Anhang

MAPLE-Programm zur Berechnung der Intensität der gestreuten *HF*-Welle

```
txtfile := fopen("Bragg_Reflexion_01.txt",WRITE, TEXT):
a := 4:
alpha := 23.4:
al := alpha*0.0174532925:
L := []:
for theta from 0 by 2 to 180 do
  t := theta*0.0174532925:
  Ereell := 0: Eimag := 0:
  for n from 0 to 4 do
    for m from 0 to 4 do
      r := sqrt(n*n + m*m)*a:
      if n = 0 then
        s := r*(cos(Pi/2 + al - t) - cos(Pi/2 + al)):
      else
        s := r*(cos(arctan(m/n) + al - t) - cos(arctan(m/n) + al)):
      end if:
      k := 2*Pi/3.18:
      Ereell := Ereell + cos(k*s):
      Eimag := Eimag + sin(k*s):
    end do:
  end do:
  Intens := evalf((Ereell^2 + Eimag^2)/625):
  printf("%4d %10.4f\n", theta, Intens);
  L := [op(L),[theta, Intens]];
end do:
writedata(txtfile, L):
fclose(txtfile):
pointplot(L, symbol = CIRCLE);
```