Ulams Primzahlspirale und Eulers Primzahlpolynom

1. *Ulam*s Primzahlspirale

Stanislaw M. Ulam, ein amerikanischer Mathematiker polnisch-jüdischer Herkunft (1909 – 1984), machte 1963 eine Entdeckung, die eine interessante Primzahleigenschaft ans Licht brachte. Um die Zeit während eines langweiligen wissenschaftlichen Vortrags zu vertreiben[1], überzog er ein Blatt Papier mit senkrechten und waagerechten Linien und nummerierte deren Kreuzungspunkte (in der Mathematik *Gitterpunkte* genannt). Er begann in der Mitte des Bogens mit 1 und bewegte sich dann im Gegenuhrzeigersinn auf einer viereckigen Spirale nach außen. Ohne große Absicht markierte er die Primzahlen unter den Zahlen, die er der Reihe nach eintrug – und stellte zu seinem Erstaunen fest, dass diese sich auf Geraden häuften, die diagonal von links unten nach rechts oben (Richtung der Hauptdiagonalen) oder von links oben nach rechts unten (Richtung der Nebendiagonalen) verlaufen. Daneben gibt es eine gewisse Tendenz, die Senkrechten und Waagerechten zu bevölkern.

Wir ersetzen die Gitterpunkte der *Ulam*schen Skizze durch die Felder eines karierten Papiers, um die Nummerierung besser sichtbar zu machen. Das Ergebnis zeigt Abb. 1. Sie enthält die natürlichen Zahlen von 1 (Mitte) bis 121 (rechte untere Ecke). Die Primzahlen belegen die *grau* markierten Felder, ihr Zahlenwert ist in *Rot* angegeben. Von den sonstigen Zahlen sind nur diejenigen kleiner als 26 eingetragen (*dunkelgrau* gefärbt). Die Pfeile verweisen auf das Feld des jeweiligen Nachfolgers, sie zeigen die ersten zwei Windungen der Spirale.

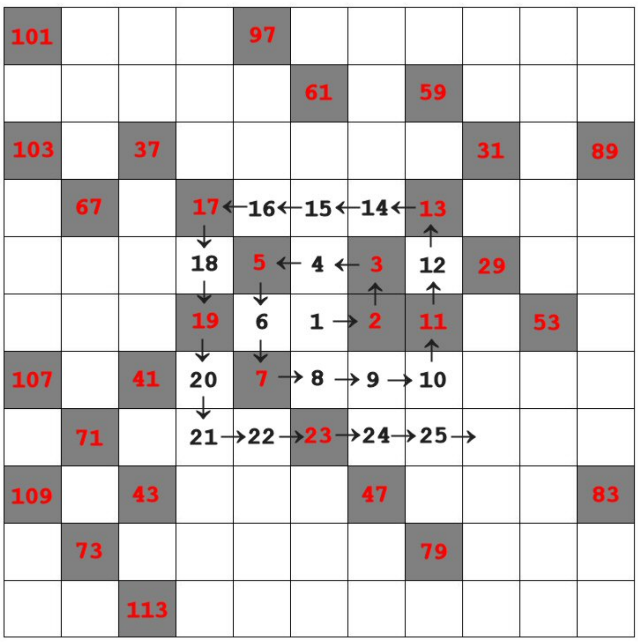

Abb. 1 Ulams (viereckige) Primzahlspirale. Die natürlichen Zahlen werden, in der Mitte mit 1 beginnend, der Reihe nach spiralförmig im Gegenuhrzeigersinn eingetragen. Hier sind es die Zahlen bis einschließ-lich 121 in der rechten unteren Ecke. Für die Zahlen < 26 ist die Spiralwindung durch Pfeile angedeutet. Grau unterlegte Karos: Primzahlen (der Zahlenwert ist in Rot eingetragen). Sie häufen sich auf diagonal verlaufenden Geraden. Die Sequenzen 5, 19, 41, 71, 109 und 7, 19, 23, 47, 79 bilden sogar zusammenhängende Geradenabschnitte in Diagonalrichtung.

Die Häufung der Primzahlen auf diagonal verlaufenden Geraden ist zu erkennen. Es gibt sogar Folgen wie 5, 19, 41, 71 und 109 oder 7, 19, 23, 47 und 79, deren Glieder zusammenhängende

Geradenabschnitte bilden. Dieser Trend setzt sich fort, wenn wir zu größeren Zahlen übergehen. Das wird in Abb. 2 sichtbar. Sie enthält die natürlichen Zahlen von 1 bis $9025 = 95^2$, spiralförmig angeordnet wie in der vorherigen Abbildung (Die Zahl 9025 befindet sich wiederum in der rechten unteren Ecke). Primzahlen sind mit *weißer* Farbe markiert, die zusammengesetzten Zahlen bilden den *blauen* Hintergrund. Die Grafik zeigt deutlich, dass sich die Primzahlen auf Geraden in den Richtungen der Haupt- und Nebendiagonalen zu Ketten zusammentun. Außerdem deutet sich eine Konzentration auf horizontalen und vertikalen Geraden an.

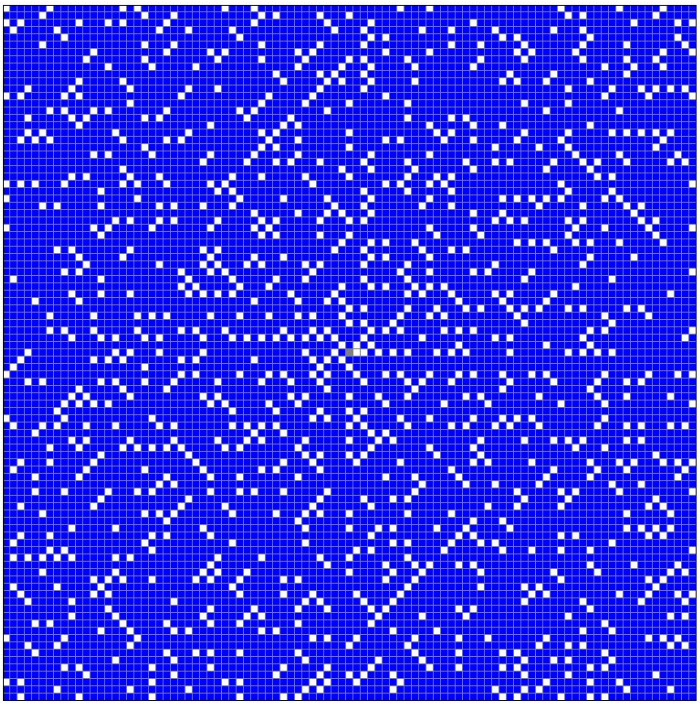

Abb. 2 Ulams Primzahlspirale für die natürlichen Zahlen ≤ 9025. Weiß: Primzahlen, blau: zusammengesetzte Zahlen. Auch größere Primzahlen, hier diejenigen ≤ 9025, häufen sich vorzugsweise auf Geraden, die unter 45° von links unten nach rechts oben (Richtung der Hauptdiagonalen) oder unter 45° von links oben nach rechts unten (Richtung der Nebendiagonalen) verlaufen.

Von Interesse ist die Frage, ob sich aus den Primzahlketten der *Ulam*schen Spirale Formeln für Primzahlfolgen herauslesen lassen. Das ist in der Tat der Fall. Die Reihe der Primzahlfelder beispielsweise, die bei 5 beginnt und sich in Richtung *SW* fortsetzt (Abb. 1), enthält die Primzahlen 5, 19, 41, 71, 109. Sie lässt sich durch den Term $4n^2 + 10n + 5$ erzeugen, wenn man für n die Zahlen 0 bis 4 einsetzt. Der nächste, für $n = 5$ erzeugte Wert wäre 155 und damit keine Primzahl.

2. *Euler*s Primzahlpolynom $n^2 - n + 41$

Die längste Sequenz von Primzahlen, die in der Spirale Abb. 2 sichtbar ist, beginnt bei der Zahl 3463 (im Quadranten rechts unten) und erstreckt von dort aus sich über weitere acht Felder in Richtung *SW*. Der zugehörige Term ist $4n^2 + 234n + 3463$. Er erzeugt für $n = 0, 1, \ldots, 8$ die Primzahlen 3463, 3701, 3947, 4201, 4463, 4733, 5011, 5297 und 5591 (Für $n = 9$ liefert der Term die zusammengesetzte Zahl $5893 = 71 \cdot 83$). Diese Erkenntnis ist nicht besonders aufregend. Tief greifender ist die Einsicht, die man gewinnt, wenn man die Nummerierung der Folgeglieder ändert: ersetzt man in $4n^2 + 234n + 3463$ die Variable n durch $(n - 58)/2$, entsteht der Term $n^2 + n + 41$, den schon *Euler* [2] als sehr produktive „Primzahlfabrik“ kannte – der Term liefert für $n = 0$ bis 39 eine ununterbrochene Folge von Primzahlen. Auch für größere n als 39 ist er äußerst primzahlträchtig – unsere mit 3463 startende Kette ergibt sich beispielsweise für $n = 58, 60, \ldots$ bis 74. Abbildung 3 zeigt, in derselben Spiraldarstellung wie Abb. 2, alle Primzahlen kleiner als 9026, die von $n^2 + n + 41$ erzeugt werden (*blaue* Karos). Sie „rotieren“ anfangs um die Mitte der Spirale, reihen sich dann aber in die schon erwähnte Diagonale ein, die von *NO* nach *SW* verläuft. Die *roten* Karos entsprechen den Primzahlen, die von $n^2 - n + 41$ (oder $n^2 + n + 41$ für negative n) generiert werden. Sie verhalten sich wie ihre *blauen* Zahlengenossen und münden schließlich in eine weiter oben liegende Diagonale gleicher Richtung ein.

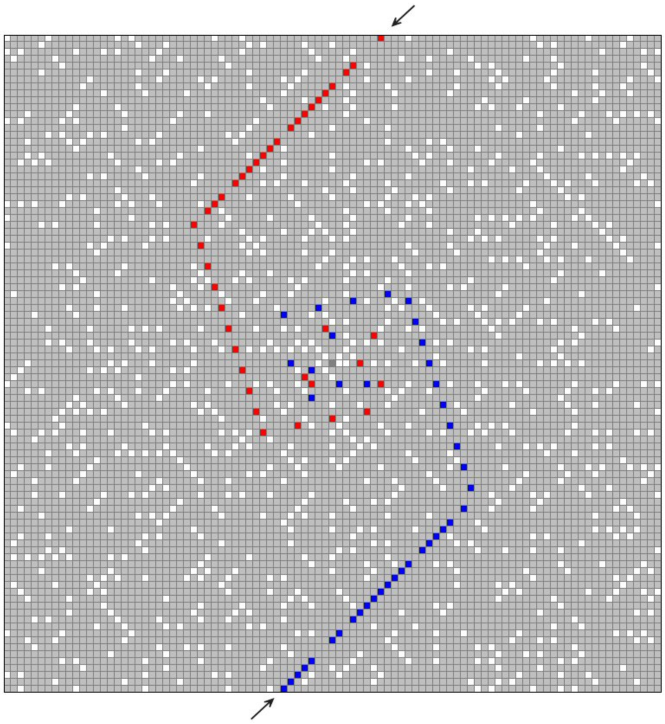

Abb. 3 Zahlenspirale wie in Abb. 2. Hervorgehoben sind die Primzahlen, die durch die Terme $n^2 - n + 41$ (rot) und $n^2 + n + 41$ (blau) erzeugt werden (Euler 1772). Sie münden jeweils in eine der Diagonalen, auf denen die Dichte der Primzahlen groß ist (Pfeile).

In der Literatur [3] findet man oft Darstellungen der von $n^2 + n + 41$ erzeugten Primzahlen, die sich in einer einzigen Diagonale aneinanderreihen. Wir erhalten sie, wenn wir die Zahlenspirale in der Mitte nicht bei 1, sondern bei 41 beginnen lassen. Abbildung 4 zeigt diese Darstellung.

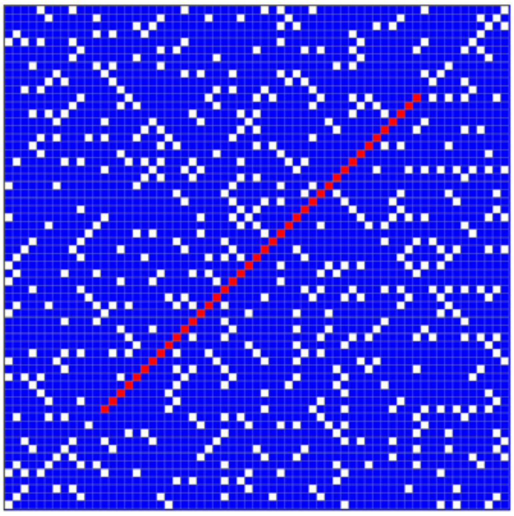

Abb. 4 Zahlenspirale, die mit 41 an Stelle der 1 in der Mitte beginnt. Sie zeigt in der Diagonale die Ketten von Primzahlen, die durch Eulers Primzahlformel $n^2 + n + 41$ für $n = 0, 1, \ldots$ erzeugt wird (rote Karos).

3. *Hardy* und *Littlewoods* Conjecture F

Vom Standpunkt der Mathematik aus gesehen, ist die Häufung der Primzahlen auf den Diagonalen, Senkrechten und Waagerechten nicht vollständig verstanden. Einen ersten Beitrag zur Lösung des Problems kann man einer Arbeit von *Hardy* und *Littlewood* [4] aus dem Jahr 1923 entnehmen. Dort wird, schon 40 Jahre vor der „Entdeckung" der Primzahlspirale, eine Behauptung über diejenigen Primzahlen formuliert, die sich durch den Term $an^2 + bn + c$ (mit $n \in \boldsymbol{N}$)[5] darstellen lassen – wobei a, b und c ganze Zahlen sind und $a > 0$ ist. Diese Behauptung (genannt *Conjecture F*) ist deswegen anwendbar, weil $an^2 + bn + c$ mit $a = 4$ genau der Term ist, durch den sich alle Zahlen auf den Diagonalen, Senkrechten und Waagerechten darstellen lassen. Dabei ist b für Diagonalen gerade, für Senkrechten und Waagerechten ungerade. Ein Beispiel ist der schon erwähnte Term $4n^2 + 234n + 3463$, ihm entspricht ein Teil der blau gefärbten Karos in Abb. 3.

Dass in der Zahlenspirale Diagonalen durch quadratische Polynome beschrieben werden, die mit $4n^2$ beginnen, lässt sich für den Sonderfall der ungeraden Quadratzahlen 1, 9, 25, 49, 81, ... einfach zeigen: Wir beginnen (siehe Abb. 1) im Zahlenfeld mit der 1 in der Mitte der Spirale. Um dieses Feld in einer Spiralwindung zu „umwickeln", benötigen wir 8 Zahlenfelder. In diese tragen wir die Zahlen 2 bis 9 ein, wobei die 9 als letzte Zahl in der rechten unteren Ecke Platz findet. Damit ist ein Quadrat mit einem Umfang" von $4\cdot\sqrt{9} = 12$ Zahlenfeldern entstanden, die im zweiten Schritt zu „umwickeln" sind. Dazu benötigen wir 12 + 4 = 16 Zahlenfelder – 12 für die Felder des „Umfangs" und 4 für diejenigen, die in den 4 Ecken hinzukommen. Diese Felder tragen die Zahlen von 10 bis 25, wobei die Zahl 25 wiederum in der rechten unteren Ecke der „Wicklung" erscheint. Unser Quadrat hat jetzt einen Umfang von $4\cdot\sqrt{25} = 20$ Zahlenfeldern. Die nächste „Wicklung" erfordert daher 20 + 4 = 24 Felder. Darin bringen wir die Zahlen 26 bis 49 unter, die 49 wiederum in der rechten unteren Ecke. Unsere Wickeltechnik vollzieht sich, allgemein formuliert, nach der Rekursionsformel $x_{n+1} = x_n + 4\sqrt{x_n} + 4$ mit $x_0 = 1$. Sie produziert dabei die Zahlen $x_n = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, wie man durch Induktion über n beweist.

Auch die *Euler*schen Primzahlterme $n^2 - n + 41$ und $n^2 + n + 41$ lassen sich in Polynome umformen, die mit $4n^2$ beginnen. Dazu ersetzen wir n durch $2n$, oder, was dem gleichkommt, beschränken n auf gerade Zahlen. Wir erhalten $4n^2 - 2n + 41$ bzw. $4n^2 + 2n + 41$.

Nach dieser Zwischenbemerkung kommen wir zurück zur *Conjecture F*. Sie betrifft, wie schon erwähnt, quadratische Terme $an^2 + bn + c$ ($n \in \boldsymbol{N}$), wobei a, b und c ganze Zahlen sind und $a > 0$ ist. Bedingung ist, dass diese Terme sich nicht faktorisieren lassen und so zusammengesetzte Zahlen generieren. Das bedeutet, dass die Koeffizienten keinen gemeinsamen Faktor > 1 haben dürfen oder dass die Diskriminante $b^2 - 4ac$ kein vollständiges Quadrat sein darf. Darüber hinaus dürfen $a + b$ und c nicht beide gerade sein, denn in diesem Fall erzeugt der Term nur gerade Zahlen (außer möglicherweise für $n = 2$). *Hardy* und *Littlewood* behaupten nun: (1) Terme $an^2 + bn + c$, die sich, wie gerade dargelegt, *nicht* faktorisieren lassen, produzieren für $n = 0, 1, 2, ...$ unendlich viele Primzahlen. (2) Die Zahl $P(n)$ der Primzahlen der Form $an^2 + bn + c$, die kleiner als n sind, ist gegeben durch

$$(1) \qquad P(n) \sim A\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{n}}{\log n} ,$$

wobei A von a, b und c abhängt, aber nicht von n. Die Tilde bedeutet „asymptotisch gleich", das heißt, „gleich für ausreichend großes n ". Setzt man in dieser Formel A gleich 1, erhält man die Zahl der Primzahlen kleiner als n in einer Menge von Zufallszahlen, die dieselbe Dichte haben wie die durch $an^2 + bn + c$ gegebenen Zahlen. Die Zahl A gibt daher an, um welchen Faktor die Wahrscheinlichkeit, dass $an^2 + bn + c$ Primzahl ist, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallszahl vergleichbarer Größe Primzahl ist. Für *Euler*s Term $4n^2 - 2n + 41$ errechneten *Hardy* und *Littlewood* $A \approx 6{,}6$. Das heißt, die von $4n^2 - 2n + 41$ erzeugten Zahlen sind mit einer Wahrscheinlichkeit prim, die etwa 7 mal größer ist als Zahlen vergleichbarer Größe, die ein

Zufallsgenerator erzeugt. Das ist zugleich eine quantitative Aussage über die Dichte der Primzahlen auf einer der Diagonalen – in Abb. 3 auf der Diagonalen, in die die roten Karos einmünden.

Nach der Arbeit von *Hardy* und *Littlewood* gab es weitere Untersuchungen zum Problem der Primzahlterme. Mit Computerunterstützung findet man heutzutage Polynome, die noch größere Primzahldichten haben als der *Euler*sche Term $4n^2 - 2n + 41$. Den Rekord halten zur Zeit *Jacobson* und *Williams*, sie haben ein quadratisches Polynom mit $A \approx 11{,}3$ entdeckt [6].

4. Primzahlfreie Schneisen

Es gibt Terme $an^2 + bn + c$, die in Faktoren zerlegt werden können und deshalb die oben erwähnten Kriterien nicht erfüllen. Sie führen zu „Schneisen“, die von Primzahlen gemieden werden. Diese Schneisen gehen von der Mitte oder deren Umgebung aus und laufen strahlenförmig nach außen. Ihre Richtung wollen wir durch die entsprechende Himmelsrichtung angeben – mit der üblichen Konvention, dass Richtung Nord senkrecht nach oben bedeutet.

Ein Beispiel ist die bei 1 (Abb. 1) startende, in Richtung *SO* (Südost) führende Linie, auf der die schon erwähnten Quadrate 1, 9, 25, 49, 81, ... der ungeraden Zahlen liegen. Man erhält sie, indem man in den Term $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ nacheinander $n = 0, 1, 2, 3, ...$ einsetzt. Sie sind das Produkt der Zahl $2n + 1$ mit sich selbst und infolgedessen zusammengesetzt. Die Folge der Quadrate der geraden Zahlen startet mit der Zahl 4 (Abb. 1). Auch sie sind als Produkt einer Zahl mit sich selbst zusammengesetzt. Sie bilden die Schneise der Zahlen 4, 16, 36, ... , die in Richtung *NW* verläuft. Im Übrigen ist jede zweite natürliche Zahl gerade und somit keine Primzahl (mit Ausnahme der 2). In unserer spiralförmigen Anordnung führt das dazu, dass *jede zweite* Gerade in Haupt- und Nebendiagonalrichtung primzahlfrei ist. Mit anderen Worten: denkt man sich die Spiralebene als unendlich ausgedehntes Schachbrett, trifft man Primzahlen, wenn überhaupt, nur auf den schwarzen oder, je nach Konvention, nur auf den weißen Feldern. Diese Eigenschaft der geraden Zahlen führt dazu, dass die vorhin erwähnte primzahlfreie Diagonale der *ungeraden Quadratzahlen* im Westen und Osten von je einer Diagonalen flankiert wird, auf der es ebenfalls keine Primzahlen gibt. So entsteht eine von den Zahlen 8, 9 und 10 ausgehende, in Richtung *SO* verlaufende breite Schneise.

Eine weitere primzahlfreie Diagonale in Richtung *SO* wird von den Zahlen gebildet, die durch den Term $4n^2 + 20n + 21 = (2n + 7)(2n + 3)$ mit $n = 0, 1, 2, 3, ...$ gegeben sind. Sie beginnt bei der Zahl 21 (Abb. 1) und wird ebenfalls von zwei Diagonalen gerader Zahlen eingeschlossen. Dadurch entsteht ein weiteres, bei den Zahlen 22, 21 und 42 beginnendes, breites Band ohne Primzahlen. Die ebenfalls schon erwähnte, in Richtung *NW* verlaufende Diagonale der *geraden* Quadratzahlen hat im Osten eine primzahlfreie Nachbarin, die bei der Zahl 15 (Abb. 1) beginnt. Sie wird durch den Term $4n^2 + 16n + 15 = (2n + 3)(2n + 5)$ mit $n = 0, 1, 2, 3, ...$ dargestellt. Noch weiter östlich schließt sich eine Diagonale von geraden Zahlen an, so dass auch hier eine breite Schneise entsteht, auf der es keine Primzahlen gibt. Sie beginnt bei den Zahlen 14, 15 und 16. Schließlich gibt es Reihen primzahlfreier Felder, die von der Mitte aus waagerecht in Richtung West bzw. Ost und andere, die senkrecht nach Norden bzw. Süden verlaufen. Ein Beispiel ist die Schneise, die bei der Zahl 10 beginnt und in Richtung Ost verläuft. Sie enthält die Zahlen, die durch den Term $4n^2 + 13n + 10 = (4n + 5)(n + 2)$ mit $n = 0, 1, 2, 3, ...$ gegeben sind.

5. Zusammengesetzte Zahlen in der Spirale

Es lohnt sich, ein wenig über den „Tellerrand“ der Primzahlen hinauszuschauen und nach dem Verhalten der zusammengesetzten Zahlen in der Spirale zu fragen. Dazu teilen wir sie in Klassen nach der Anzahl ihrer (echten) Teiler ein. Die nach den Primzahlen teilerärmsten Zahlen sind die

Quadrate der Primzahlen. Sie besitzen nur zwei Teiler. Beispiel: 49 mit der Teilermenge {1, 7}. Dagegen ist die Zahl 81 = 9 · 9 nicht das Quadrat einer Primzahl, ihre Teilermenge {1, 3, 9, 27} hat dem entsprechend mehr als zwei Teiler. Die Primzahlquadrate sind (bis auf die Zahl $2^2 = 4$) eine Untermenge der Quadrate der ungeraden Zahlen, bevölkern daher die schon erwähnte Schneise in Richtung *SO*. Wie sich die zusammengesetzten Zahlen, grob nach ihrer Teileranzahl sortiert, in die Spirale einfügen, geht aus Abb. 5 hervor. Dort sind die Zahlen mit 2 Teilern (Primzahlquadrate) *gelb*, die Zahlen mit 3 Teilern in der Farbe *cyan*, diejenigen mit 4 Teilern mit *grün*, und die Zahlen mit 5 Teilern mit *rot* markiert. Zahlen mit 6 und mehr Teilern wurden zusammengefasst und sind in *blau* gekennzeichnet.

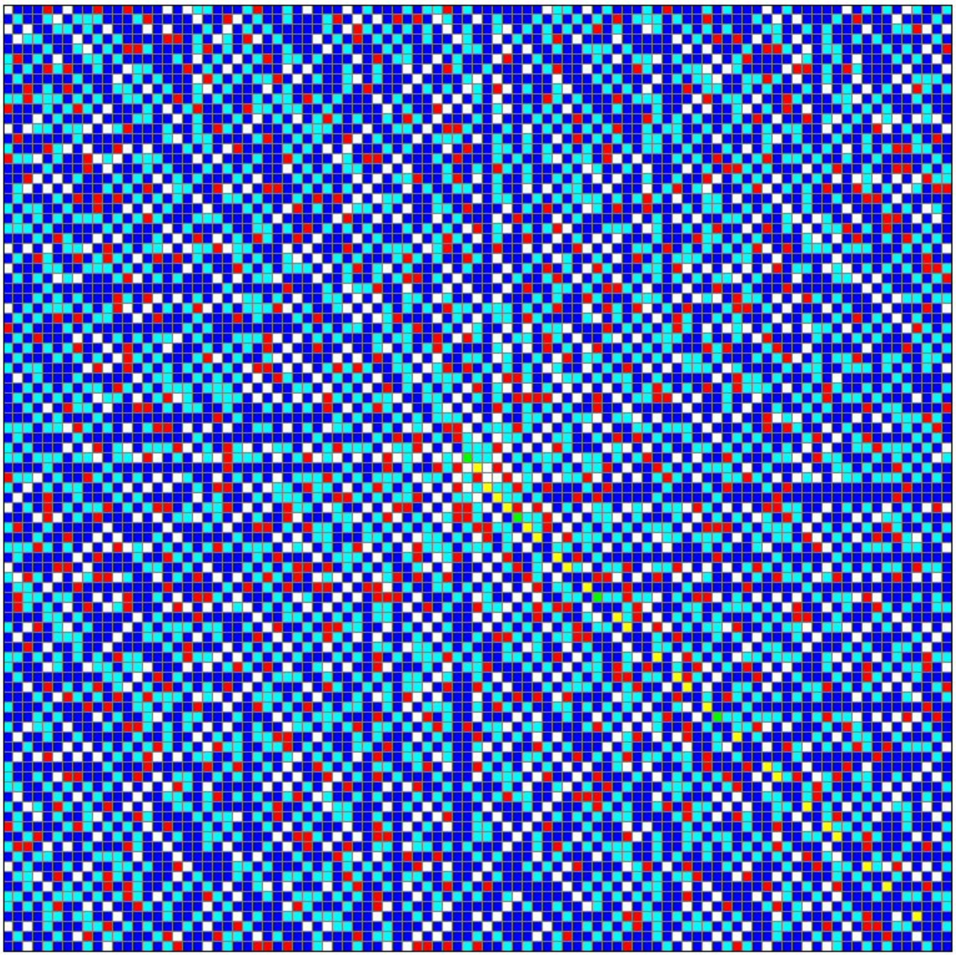

Abb. 5 Zahlenspirale wie in Abb. 2, ergänzt durch Angaben über die Anzahl der Teiler der zusammengesetzten Zahlen. Primzahlen: weiß. Zusammengesetzte Zahlen: gelb (2 Teiler), cyan (3 Teiler), grün (4 Teiler), rot (5 Teiler) und blau (6 und mehr Teiler). Die primzahlfreien Schneisen werden zum großen Teil von Zahlen mit vielen Teilern (blau) bevölkert.

Ausgeprägte Muster innerhalb der Menge der zusammengesetzten Zahlen sind in Abb. 5 nicht zu erkennen. Sie sind recht zufällig verteilt, wie beispielsweise ein Blick auf die roten Felder zeigt. Die blauen Felder hingegen zeigen, ähnlich wie die Primzahlen (weiß), eine Bevorzugung der beiden Diagonalen, der Senkrechten und der Waagerechten. Sie bilden einen Teil der oben erwähnten primzahlfreien Schneisen und lassen diese hervortreten. Die Grafik ist somit, wie auch die anderen Zahlenspiralen, eine interessante Mischung von Ordnung und Zufall.

Anmerkungen und Literatur

[1] So erzählt es *Martin Gardner* in seinem *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*, W. H. Freeman, San Francisco, 1963, S. 79

[2] *Euler*, zitiert in http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl

[3] *Martin Gardner,* a.a.O., S. 79

[4] *Hardy* und *Littlewood*, zitiert z. B. in http://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral.

[5] ***N*** bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ...

[6] *Michael J. Jacobson* und *Hugh C. Williams*: New Quadratic Polynomials with High Densities of Prime Values, Mathematics of Computation 72, 499 (2002)