Primzahlteppiche

1. Gitterpunkt und Koordinatensystem

Wir betrachten die Menge der *Paare natürlicher Zahlen*. Ein Element dieser Menge ist zum Beispiel das Zahlenpaar (5, 7). In der Mathematik wird die Menge der Paare natürlicher Zahlen mit $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ (gesprochen „*N kreuz N* “) bezeichnet, dabei ist $\boldsymbol{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$. Jedem Zahlenpaar (x, y) ist ein Gitterpunkt in einem kartesischen Koordinatensystems zugeordnet – dem Paar (5, 7) beispielsweise der Punkt mit der x-Koordinate 5 und der y-Koordinate 7.

Diese Gitterpunkte wollen wir mit unterschiedlichen Farben versehen und stellen sie deshalb durch ein quadratisches Kästchen dar, wie bei kariertem Schreibpapier. Abbildung 1 zeigt ein derartiges kartesisches Koordinatensystem. In diesem ist der Punkt (5, 7) durch ein rotes Karo markiert.

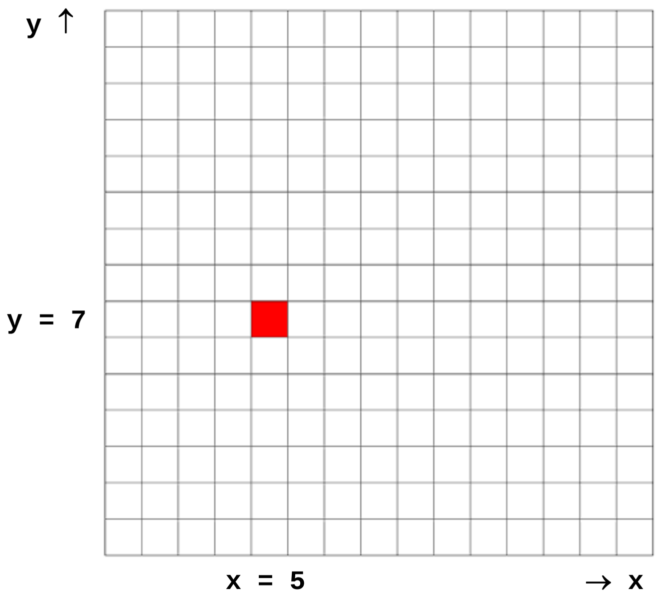

Abb. 1 Gitterpunkte im kartesischen Koordinatensystem. Die Gitterpunkte werden dargestellt durch quadratische Kästchen (Karos). Das Karo in der Ecke links unten entspricht dem Punkt (1,1). Rotes Karo: Punkt (5,7) der Koordinatenebene.

Man beachte, dass das Karo in der linken unteren Ecke unseres Koordinatensystems dem Punkt (1, 1) entspricht. Einen „Nullpunkt“, wie in einem Koordinatensystem reeller Zahlen, gibt es nicht.

2. Primzahlteppich

Die Idee des Primzahlteppichs geht zurück auf *Bartholomé*, *Rung* und *Kern*[1]. Ein Primzahlteppich ist ein Koordinatengitter, in dem diejenigen Punkte (x, y) markiert werden, für die beispielsweise die Summe $x + y$, das Produkt xy oder irgendein anderer Rechenausdruck („Term“) $T(x, y)$ eine Primzahl ist. Beispiele für Terme sind $T(x, y) = xy + 1$, $T(x, y) = x^2 - y$ oder $T(x, y) = x^3 + y^3$. Punkte bzw. Karos (x, y), für die $T(x, y)$ eine Primzahl ist, kennzeichnen wir durch die Farbe *weiß*. Um etwas Farbe in den Teppich zu bringen, markieren wir mit anderen Farben auch die Punkte (Karos), für die der Term eine zusammengesetzte Zahl mit *zwei* bzw. *drei* Primfaktoren ist. Wir wählen *rot* für Zahlen mit zwei Primfaktoren und *blau* für solche mit drei Primfaktoren. Dazu ein Beispiel: Der Term sei $T(x, y) = | x - y |$. Die beiden senkrechten Striche bedeuten, dass der *Absolutbetrag* der Zahl zu bilden ist, die von diesen Strichen eingeschlossen wird – hier ist es der Absolutbetrag der Differenz $x - y$. Für $x = 5$ und $y = 7$ beispielsweise ist $| x - y | = | 5 - 7 | = | -2 | = 2$.

Jetzt werden alle Karos *weiß* gefärbt, für die $| x - y | = 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ usw. ist. Das ergibt Streifen weißer Karos, die von links unten nach rechts oben parallel zur Hauptdiagonalen $y = x$ verlaufen. Da der Term $| x - y |$ seinen Wert bei Vertauschung von x und y nicht ändert, erhalten die Karos (x, y) und (y, x) dieselbe Farbe. Das heißt, das Streifenmuster ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Ist $| x - y |$ das Produkt von genau *zwei Primfaktoren* , also $| x - y | = 2{\cdot}2, 2{\cdot}3, 2{\cdot}5, ... , 3{\cdot}3, 3{\cdot}5, ... , 5{\cdot}7$, usw., erhält das Karo (x, y) die Farbe *rot*. Schließlich werden diejenigen Karos (x, y) *blau* gefärbt, für die $| x - y |$ das Produkt von genau *drei Primfaktoren* ist (z. B. $| x - y | = 30 = 2{\cdot}3{\cdot}5$). Trifft keiner dieser Fälle zu, behält das Karo die Hintergrundfarbe *grau*. Auch die rot und blau gefärbten Karos reihen sich zu Streifen auf, die parallel und symmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet sind. Abbildung 2 zeigt den so entstandenen Teppich für $1 \le x, y \le 30$.

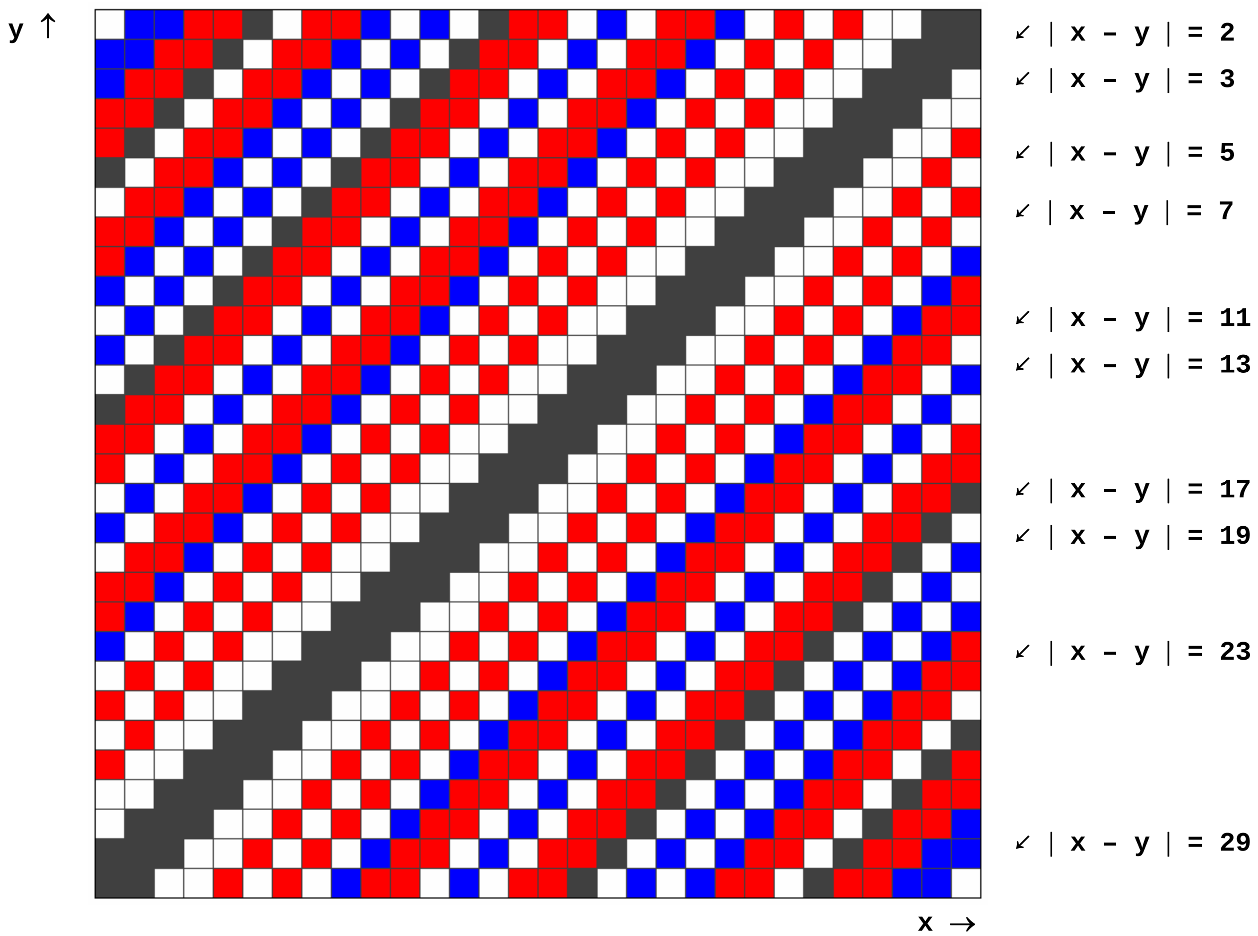

Abb. 2 Primzahlteppich des Terms T(x, y) = | x – y |. Weiß: Karos, für die T(x, y) eine Primzahl ist, rot: T(x, y) ist aus genau zwei Primfaktoren zusammengesetzt, blau: T(x, y) ist eine Zahl mit genau drei Primfaktoren. Grau: Zahlen mit mehr als 3 Primfaktoren.

In dieser Abbildung ist dort, wo die Primzahldiagonalen auf den rechten Rand stoßen, die zugehörige Primzahl angegeben. Die weißen „Zähne“, die in das Grau der Hauptdiagonalen und deren Nachbardiagonalen hineinragen, gehören zu $| x - y | = 2$ und $| x - y | = 3$. Primzahlzwillinge wie 11 und 13 oder 17 und 19 erzeugen weiße Streifenpaare, deren Karo-Ecken sich berühren.

Die Diagonalstreifen, die der Term $T(x, y) = | x - y |$ erzeugt, sind ein vergleichsweise einfaches Teppichmuster. Andere Terme wie beispielsweise $T(x, y) = x^2 + y^2$ knüpfen eher kleingemusterte Ornamente[1].

3. Primzahlteppich des Terms $T(x, y) = x^2 + y$

Mathematisch interessante Primzahlteppiche werden von Termen erzeugt, die quadratisch in x und linear in y (oder umgekehrt) sind. Das einfachste Beispiel ist $T(x, y) = x^2 + y$. Abbildung 3 zeigt den zugehörigen Teppich. Primzahlen sind, wie in Abb. 2, durch weiße Karos gekennzeichnet. Sie zeigen eine unregelmäßige Verteilung, aus der sich Andeutungen von Streifen in Richtung der Haupt- und Nebendiagonalen und in waagrechter Richtung herausheben.

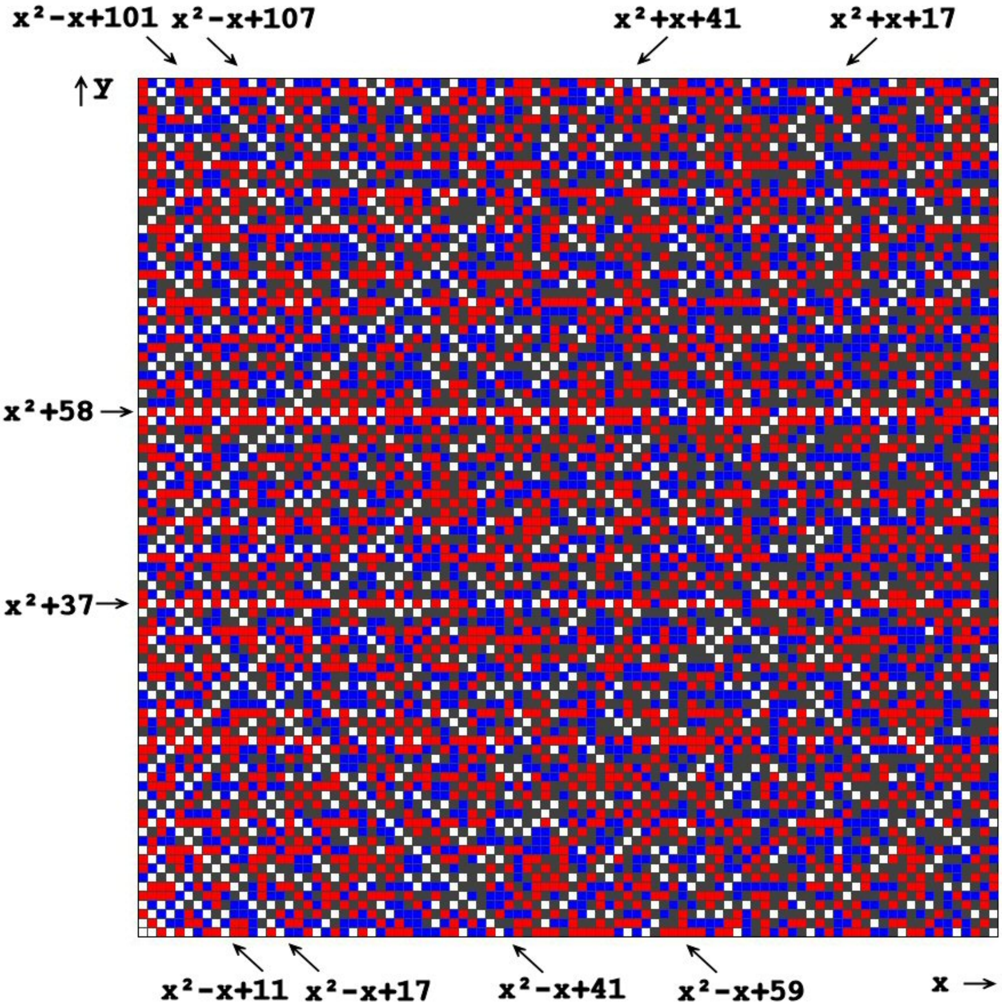

Abb. 3 Primzahlteppich des Terms $T(x, y) = x^2 + y$. Weiß: Karos, für die $T(x, y)$ eine Primzahl ist, rot: $T(x, y)$ enthält genau zwei Primfaktoren, blau: $T(x, y)$ enthält genau drei Primfaktoren. Grau: $T(x, y)$ mit mehr als drei Primfaktoren. Die Primzahlkaros häufen sich auf Geraden, die unter 45° von links unten nach rechts oben laufen (Hauptdiagonalenrichtung) und den dazu senkrechten Geraden (Richtung der Nebendiagonalen). Sie entsprechen quadratischen Polynomen mit großer Primzahldichte. Beispiel: das Eulersche Polynom $x^2 - x + 41$. Es erzeugt für $x = 1, 2, \ldots$ eine ununterbrochen Folge von 40 Primzahlen.

Die diagonal verlaufenden weißen Streifen enthalten Primzahlen, die sich aus quadratischen Polynomen ergeben. Einige von ihnen sind am Bildrand durch Pfeile gekennzeichnet. Der Streifen beispielsweise, der etwas unterhalb der Mitte am linken Rand beginnt und unter 45° nach rechts unten verläuft, entspricht der Gleichung $y = 41 - x$. Setzt man diesen Term in $T(x, y) = x^2 + y$ ein, so entsteht das Polynom $T(x) = x^2 - x + 41$ (Pfeil am unteren Bildrand). Es ist das bekannte, von *Euler* [2] 1772 entdeckte Polynom, das für *alle* natürlichen Zahlen $x \leq 40$ eine ununterbrochene Folge von Primzahlen liefert. Für größere Werte von x produziert es etwa 7 mal mehr Primzahlen als ein

Zufallsgenerator, der vergleichbar große Zahlen erzeugt[3]. Ersetzt man x durch $-x$, entsteht das Polynom $T(x) = x^2 + x + 41$ (Pfeil am oberen Bildrand), das dieselben Eigenschaften hat. Auch die Gerade $y = x + 17$, die parallel zur Hauptdiagonalen verläuft, enthält mehr weiße Karos als per Zufall auf ihr liegen würden. Das zugehörige Polynom ist $T(x) = x^2 + x + 17$ (Pfeil am oberen Bildrand), es liefert für große x etwa 4 mal mehr Primzahlen als ein Zufallsgenerator bei vergleichbarer Zahlengröße. Interessant ist, dass auch horizontale Geraden mit überdurchschnittlicher Primzahldichte sichtbar werden – beispielsweise die Geraden $y = 37$ und $y = 58$. Die zugehörigen Terme $T(x) = x^2 + 37$ und $T(x) = x^2 + 58$ erzeugen etwa 2,5 bzw. 3,3 mal mehr Primzahlen als ein Zufallsgenerator, der Zahlen vergleichbarer Größe produziert.

Abbildung 4 zeigt noch einmal den Primzahlteppich des Terms $T(x, y) = x^2 + y$ für einen größeren Zahlenbereich. Es sind ausschließlich Primzahlen markiert (weiße Karos), die übrigen Zahlen bilden den blauen Hintergrund. Polynome mit großer Primzahldichte machen sich, wie in Abb. 3, durch Aneinanderreihungen von weißen Karos bemerkbar. Den Geraden vom Typ $y = A \pm x$ entsprechen Polynome der Form $T(x) = x^2 \pm x + A$. Die überragende Primzahlproduktivität des Eulerschen

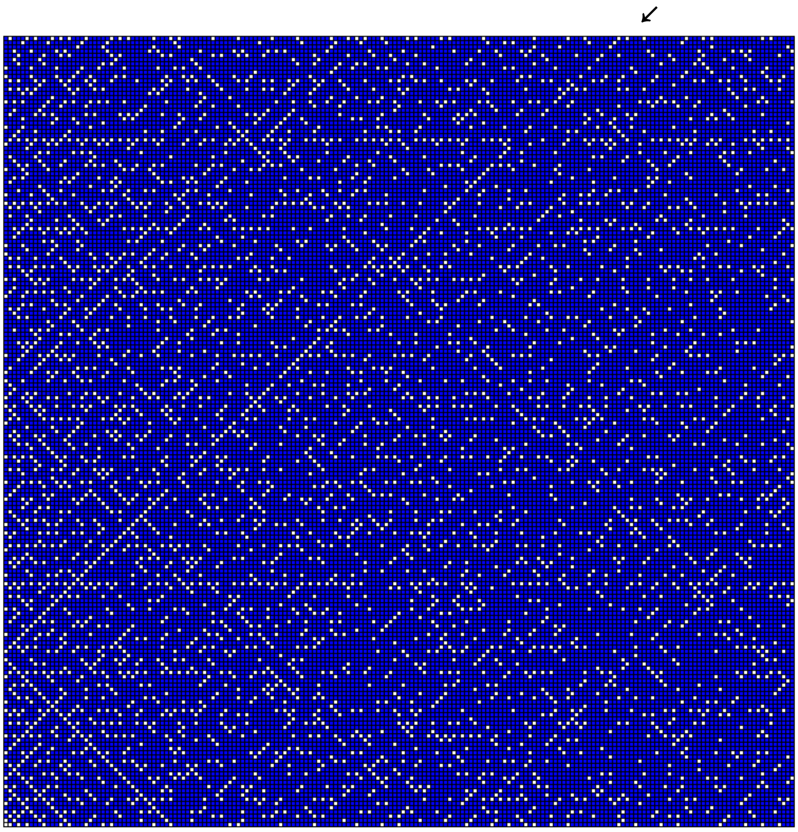

Abb. 4 Primzahlteppich des Terms T(x) = x² + y. Wie Abb. 3, jedoch für einen größeren Ausschnitt der Koordinatenebene. Markiert sind nur die Primzahlen (weiße Punkte). Pfeil: Gerade, die dem Eulerschen Polynom x² + x + 41 entspricht. Sie enthält eine überdurchschnittlich große Anzahl von Primzahlen.

Polynoms $x^2 + x + 41$ ist deutlich sichtbar – der Pfeil am oberen Rand der Abbildung gekennzeichnet die zugehörige Gerade. Weitere quadratische Polynome mit großer Primzahlergiebigkeit lassen sich zum Beispiel aus den beiden Geraden ablesen, die am linken Rand etwa in der Mitte des Koordinatengitters beginnen und unter 45° nach rechts oben bzw. rechts unten verlaufen. Die Gleichungen dieser Geraden sind $y = \pm x + 101$ und $y = \pm x + 107$, daraus folgen die Terme $T(x) = x^2 \pm x + 101$ bzw. $T(x) = x^2 \pm x + 107$ (Die nach rechts unten verlaufenden Geraden entsprechen dem negativen Vorzeichen von x und waren auch schon in Abb. 3 zu sehen). Sie liefern etwa 5,2 mal mehr Primzahlen als zufällig herausgegriffene Zahlen vergleichbarer Größe.

Auch die schon erwähnte horizontale Gerade $y = 58$ tritt deutlich hervor. Als weitere horizontale Gerade mit überdurchschnittlicher Primzahldichte erkennt man $y = 163$ in der oberen Hälfte der Abbildung. Der zugehörige Term ist $T(x) = x^2 + 163$.

4. Primzahlteppiche als Grafiken

Primzahlteppiche sind mathematisch erzeugte Grafiken. Man kann sie ästhetischen Kriterien unterwerfen. Wie weit das sinnvoll ist, mag der Leser anhand von Abb. 5 selbst entscheiden. Die Abbildung zeigt den Primzahlteppich des Terms

$$T(x,y) = [\sqrt{x^3 + 3y}]\ ,$$

in Worten: $T(x, y)$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich der Quadratwurzel aus $x^3 + 3y$ ist. Wie in Abb. 3, sind die Primzahlen mit weiß gekennzeichnet, mit *rot* und *blau* die aus 2 bzw. 3 Primfaktoren zusammengesetzten Zahlen und mit *grau* Zahlen mit mehr als 3 Primfaktoren. Farbe, Länge und Breite der Streifen unterliegen einem gewissen Trend, variieren aber ansonsten stark.

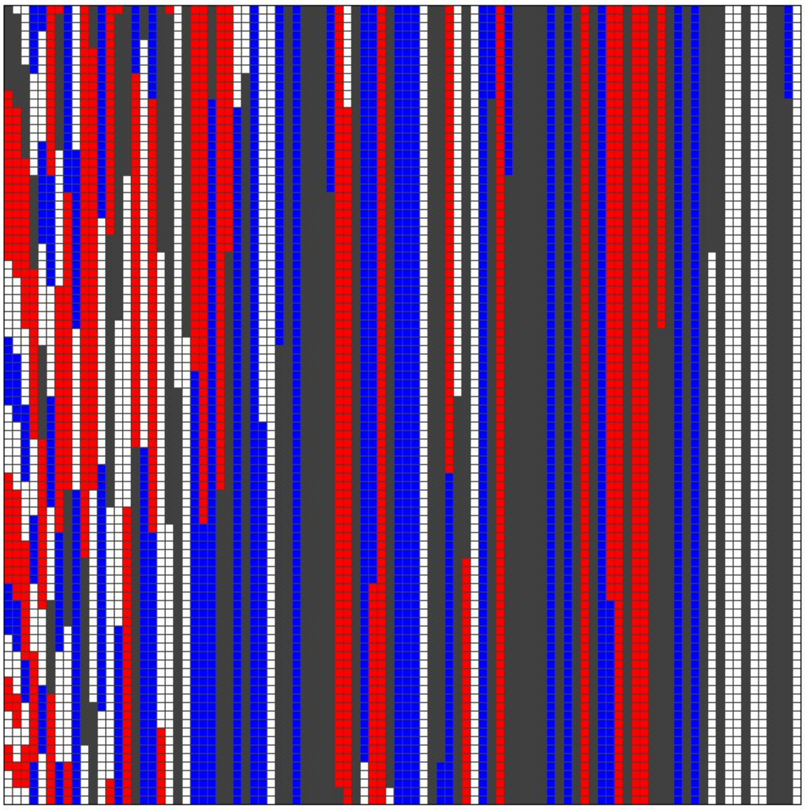

Abb. 5 Primzahlteppich zu $T(x,y) = [\sqrt{x^3 + 3y}]$. (größte ganze Zahl kleiner oder gleich der Quadratwurzel aus $x^3 + 3y$). Weiß: Primzahlen, rot: Zahlen mit 2 Primfaktoren, blau: Zahlen mit drei Primfaktoren, grau: Zahlen mit mehr als 3 Primfaktoren. Farbe, Länge und Breite der Streifen variieren mit einem gewissen Trend, aber keineswegs regelmäßig.

Darin liegt der ästhetischer Reiz dieser Grafik. Wie viele computererzeugten Bilder, hat sie eine gewisse Nähe zur *konkret-konstruktiven Kunst* [5,6] des 20. Jahrhunderts.

Anmerkungen und Literatur

[1] *Bartolomé, Andreas*, *Josef Rung* und *Hans Kern*: Zahlentheorie für Einsteiger. Vieweg 1995

[2] *Euler, Leonhard*, zitiert in http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl

[3] *Hardy, Godfrey Harold*, und *John Edensor Littlewood*, zitiert z. B. in http://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral.

[4] Quadratische Polynome mit großer Primzahldichte sind auch heutzutage noch Gegenstand der Forschung – siehe z. B. *Michael J. Jacobson* und *Hugh C. Williams*: New Quadratic Polynomials with High Densities of Prime Values, Mathematics of Computation 72, 499 (2002)

[5] Die *konkret-konstruktive Kunst* ist eine Kunstgattung des 20. Jahrhunderts, deren Regeln vorschreiben, ein Kunstwerk nach einem festgelegten, nachvollziehbaren Bauplan zu konstruieren. Mathematisch erzeugte Grafiken sind daher mit dieser Kunstrichtung verwandt. Siehe z. B.: *Guderian, Dietmar*: Mathematik in der Kunst der letzten 30 Jahre. Ebringen i. Br., Bannstein-Verlag, 1990

[6] *Wörler, Jan:* Mathematik und Konkrete Kunst: Verbindung zwischen zwei scheinbar fremden Welten. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/WOERLER_Jan_2009_KonkreteKunst.pdf

Primzahlteppiche.doc