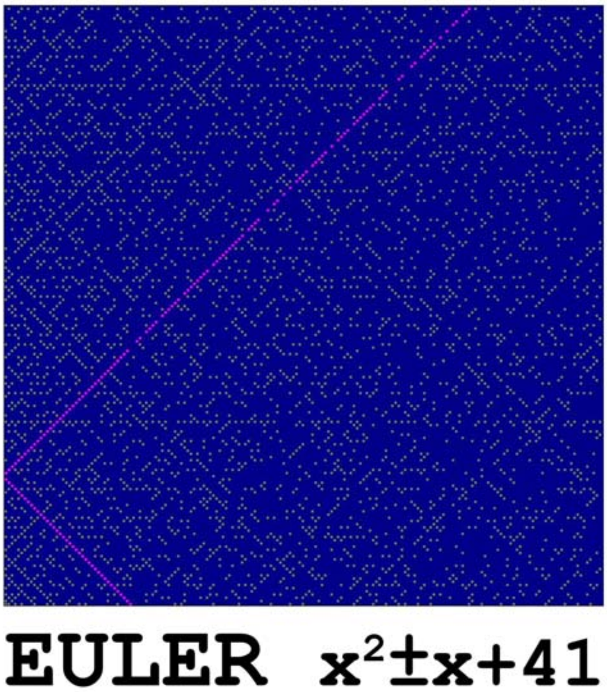
Ein Primzahlteppich zeigt Eulers Primzahlpolynom $x^2 \pm x + 41$

Setzt man im Term $x^2 - x + 41$ nacheinander $x = 1, 2, 3$, usw. bis $x = 40$, so erhält man die Zahlen 41, 43, 47, 53, usw. bis 1601, die allesamt Primzahlen sind. Dasselbe gilt für den Term $x^2 + x + 41$. Das war schon *Euler*[1] im Jahr 1772 bekannt. Der Term wird deshalb auch nach ihm benannt (*Eulersches Primzahl-Polynom*). Für Werte $x > 40$ liefern er zwar keine ununterbrochene Folge von Primzahlen, aber immerhin etwa 7mal mehr als ein Zufallsgenerator, der vergleichbar große Zahlen erzeugt[2]. Per Zufall fand ich heraus, dass man diese Eigenschaft auch grafisch darstellen kann. Die Idee dazu ist der „Primzahlteppich", eine mathematische Spielerei, die von *Bartolomé, Rung* und *Kern* in ihrem Buch über Zahlentheorie beschrieben wird[3].



Deren Primzahlteppich ist ein Koordinatengitter, in dem diejenigen Punkte (x, y) markiert werden, für die beispielsweise die Summe $x + y$, das Produkt xy oder irgendein anderer Rechenterm $T(x, y)$ eine Primzahl ist. Die Abbildung zeigt den von mir gefundenen Teppich, der die Primzahlen des Eulerschen Polynoms zu Tage treten lässt. Er wird von $T(x, y) = x^2 + y$ erzeugt. **„Normale" Primzahlen sind durch graue Karos gekennzeichnet, Eulersche durch Färbung in Magenta hervorgehoben.** Trotz der unregelmäßigen Verteilung erkennt man eine Häufung der grauen Karos in Richtung der Haupt- und Nebendiagonalen (und auf einigen Parallelen zur x-Achse). Wie erwartet, liegen auch die Eulerschen Primzahlen auf Diagonalen: Der magenta gefärbte Streifen, der in der unteren Hälfte am linken Rand beginnt und unter 45° nach rechts unten verläuft, entspricht der Gleichung $y = 41 - x$. Setzt man dieses y in den Term $T(x, y) = x^2 + y$ ein, entsteht das Eulersche Polynom $P(x) = x^2 - x + 41$. Ersetzt man x durch $-x$, entsteht $P(x) = x^2 + x + 41$. Diesem Polynom entspricht der magentafarbene Streifen, der unter 45° nach rechts oben verläuft. Die Grafik zeigt, dass beide Streifen für $x \le 40$ keine Lücken haben, also ausschließlich aus Primzahlen bestehen. Für $x > 40$ ist die überdurchschnittlich große Häufung der Primzahlen auf dem oberen Ast deutlich zu sehen.

[1] *Euler, Leonhard,* zitiert in http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahl

[2] *Hardy, Godfrey Harold* und *John Edensor Littlewood,* zitiert z. B. in http://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral.

[3] *Bartolomé, Andreas, Josef Rung* und *Hans Kern*: Zahlentheorie für Einsteiger. Vieweg 1995