

Julia-Mengen und Mandelbrot-Menge

1. Komplexe Zahlen

Es gibt quadratische Gleichungen, die in der Menge \mathbf{R} der reellen Zahlen nicht lösbar sind, zum Beispiel die Gleichung

$$(1) \quad x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1.$$

Denn es gibt keine Zahl $x \in \mathbf{R}$, die, mit sich selbst multipliziert, -1 ergibt. Eine Zahl mit dieser Eigenschaft muss daher aus einer anderen „Welt“ als \mathbf{R} sein. Man nennt sie i und definiert

$$(2) \quad i^2 = -1.$$

Dann kann man die Lösung von Gl. (1) schreiben

$$(3) \quad x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt{-1} \vee x = -\sqrt{-1} \Leftrightarrow x = i \vee x = -i.$$

Ein weiteres Beispiel für eine quadratische Gleichung, die in \mathbf{R} keine Lösungen hat, ist

$$(4) \quad x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Die Lösungsformel (*pq-Formel*) ergibt, wenn man $i^2 = -1$ beachtet,

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{1-5} \vee x = 1 - \sqrt{1-5}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{-4} \vee x = 1 - \sqrt{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4} \sqrt{-1} \vee x = 1 - \sqrt{4} \sqrt{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2i \vee x = 1 - 2i$$

Zahlen der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbf{R}$ heißen *komplexe Zahlen*, x heißt *Realteil*, y *Imaginärteil* von z . Die Zahl i wird *imaginäre Einheit* genannt.

Mathematisch korrekt definiert man komplexe Zahlen beispielsweise als geordnete Zahlenpaare (a_1, a_2) über \mathbf{R} , für die eine Gleichheit, eine (komponentenweise) Addition und eine Multiplikation erklärt ist. Die Multiplikation definiert man gemäß

$$(5) \quad (a_1, a_2) (b_1, b_2) = ((a_1 b_1 - a_2 b_2), (a_1 b_2 + a_2 b_1)).$$

Mit diesen Verknüpfungen bilden die Zahlenpaare (a_1, a_2) einen Körper, wobei sich die Paare $(a, 0)$ eineindeutig auf die Zahlen $a \in \mathbf{R}$ abbilden lassen. Mit der Schreibweise $(a, 0) = a$ und $(0, 1) = i$ erhält man die komplexen Zahlen in der Form $a + bi$.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit \mathbf{C} abgekürzt. Erstaunlich ist, dass man (1) keine weiteren Zahlen „erfinden“ muss, um auch algebraische Gleichungen höheren Grades lösen zu können, (2) mit komplexen Zahlen genau so rechnet wie mit reellen Zahlen – vorausgesetzt, man beachtet $i^2 = -1$. Bei der Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen werden Real- und Imaginärteil getrennt verarbeitet. Das heißt, man rechnet, wenn $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gegeben sind,

$$(6) \quad z \pm w = (x + iy) \pm (u + iv) = (x \pm u) + i(y \pm v).$$

Bei der Multiplikation ist das Distributivgesetz zu beachten und außerdem $i^2 = -1$ zu setzen:

$$(7) \quad z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Die Möglichkeit, algebraische Gleichungen beliebigen Grades lösen zu können, erkauft man sich damit, dass komplexe Zahlen nicht angeordnet werden können. Das heißt, zwischen zwei

komplexen Zahlen z und w existiert *keine* größer- und kleiner-Relation $z > w$ bzw. $z < w$. Dagegen kann man nach einem Vorschlag von C. WESSEL (1745 – 1818) und C. F. GAUSS (1777 – 1855) komplexe Zahlen in einem (2-dimensionalen) Koordinatensystem darstellen. Dazu trägt man den Realteil auf der x -Achse, den Imaginärteil auf der y -Achse ab. Jeder komplexen Zahl entspricht so genau ein Punkt der x - y -Ebene und umgekehrt jedem Punkt genau eine komplexe Zahl. Die Koordinatenebene erhält in diesem Fall den Namen *Gauß'sche Zahlenebene* (Abb. 1).

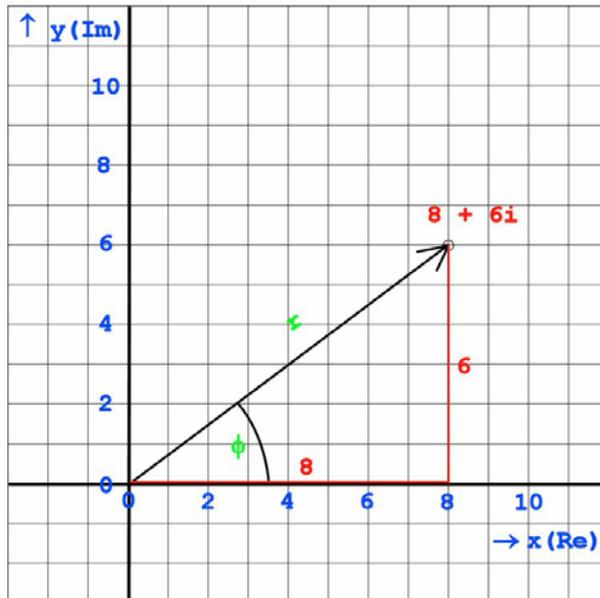


Abb. 1 Gauß'sche Zahlenebene mit Darstellung der komplexen Zahl $z = 8 + 6i$. Der Realteil wird in x -Richtung, der Imaginärteil in y -Richtung aufgetragen. Die Zahl $z = 8 + 6i$ lässt sich durch den Punkt $(8, 6)$ oder durch den Pfeil vom Nullpunkt zu diesem Punkt darstellen. Die Länge r dieses Pfeils ist der Betrag der Zahl, $r = |8 + 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Der Winkel ϕ , den der Pfeil mit der positiven x -Achse bildet, heißt das Argument der Zahl. Hier ist $\phi = \arctan(6/8) = 0,64350 \approx 36,87^\circ$.

Oft ist es sinnvoll, komplexe Zahlen als zweidimensionale *Vektoren* darzustellen. Der Vektor, den man der Zahl z zuordnet, wird durch einen Pfeil repräsentiert, der vom Nullpunkt des Koordinatensystems ausgeht und beim Zahlpunkt für z endet (Abb. 1). Die Darstellung komplexer Zahlen in der Zahlenebene legt es nahe, als *Betrag* $|z|$ einer Zahl z den Abstand des Zahlpunktes vom Nullpunkt beziehungsweise die Länge des Zahlpfeils zu definieren. Aus dieser Definition folgt

$$(8) \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Gibt man zusätzlich zum Betrag $|z|$ den Winkel ϕ an, den der Vektorpfeil mit der positiven x -Achse bildet, gelangt man zur sogenannten *Polarform* einer komplexen Zahl. Den Winkel ϕ nennt man auch das *Argument* von z , und für den Betrag $|z|$ wird in diesen Zusammenhang in der Regel das Symbol r benutzt. Die Zahlen r und ϕ heißen *Polarkoordinaten* von z , x und y bezeichnet man dagegen als *kartesische Koordinaten*. Nach Abb. 1 gilt

$$(9) \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

Daraus folgt als Darstellung in Polarform

$$(10) \quad z = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Zur Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten benutzt man

$$(11) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$(12) \quad \phi = \arctan \frac{y}{x},$$

falls $x \neq 0$. Ist $x = 0$, gilt $\phi = \pi/2$ für $y > 0$ und $\phi = -\pi/2$ für $y < 0$. Für $x = y = 0$ ist ϕ nicht definiert.

2. Iteration und Bahn

Quadriert man die komplexe Zahl $z_0 = 0,8 + 0,4i$, so erhält man

$$\begin{aligned} (0,8 + 0,4i)^2 &= (0,8 + 0,4i)(0,8 + 0,4i) \\ &= 0,64 + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,4i + 0,16i^2 \\ &= 0,64 + 0,64i - 0,16 \\ &= 0,48 + 0,64i. \end{aligned}$$

Diese Zahl werde z_1 genannt. Das Quadrat von $z_1 = 0,48 + 0,64i$ ist $-0,1792 + 0,6144i$ und soll z_2 genannt werden. Auch z_2 werde quadriert, das Ergebnis $-0,3453 - 0,2202i$ werde z_3 genannt, usw. Setzt man diese Rechnung fort, erhält man eine Folge von Punkten z_n in der komplexen Zahlenebene, die man die *Vorwärtsbahn* B^+ (engl. *forward orbit*) des Punktes z_0 unter der Abbildung $R(z) = z^2$ nennt ¹.

Das fortlaufende Quadrieren beschreibt man entweder durch die *Rekursionsformel*

$$(13) \quad z_{n+1} = z_n^2$$

oder durch *Iteration* der Abbildung $R(z) = z^2$. Startet man mit z_0 , dann ist $z_1 = R(z_0)$, $z_2 = R(z_1) = R(R(z_0))$, usw. Die n -malige Iteration von R schreibt man R^n , so dass gilt

$$(14) \quad z_n = R^n(z_0).$$

Beachte, dass mit $R(z)$ die Funktionsgleichung der Abbildung bezeichnet wird, mit \mathbf{R} (fett gedruckt) dagegen die Menge der reellen Zahlen. Außerdem sollte R^n , die n -malige Hintereinanderausführung von R , nicht mit der n -ten Potenz von R verwechselt werden.

Sei $z = R(z)$ eine Abbildung $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ und $z_0 \in \mathbf{C}$, so heißt die Folge

$$z_0, R(z_0), R(R(z_0)), \dots$$

die *Vorwärtsbahn* (engl. *forward orbit*) des Punktes z_0 unter der Abbildung $R(z)$. Die Elemente der Folge werden bisweilen zur Menge

$$B^+(z_0) = \{ z_0, R(z_0), R(R(z_0)), \dots \}$$

zusammengefasst. Auch hierfür hat sich die Bezeichnung *Vorwärtsbahn* eingebürgert.

Die nachfolgende Tabelle (Tabelle 1) zeigt die ersten Elemente der Vorwärtsbahnen unter $R(z) = z^2$ für drei verschiedene Anfangspunkte z_0 . Die Bahnen unterscheiden sich in ihrem Verhalten für $n \rightarrow \infty$. Geht man aus von $z_0 = 0,8 + 0,4i$, strebt $|z_n|$ gegen 0, der Anfangspunkt $z_0 = 0,8 + 0,6i$ führt zu $|z_n| = 1$ für alle n , während $z_0 = 0,8 + 0,9i$ eine Bahn ergibt, für die $|z_n|$ über alle Grenzen wächst.

Tabelle 1 Vorwärtsbahnen der Abbildung $R(z) = z^2$ für verschiedene Anfangspunkte z_0

n	z_n		n	z_n		n	z_n	
0	+ 0,8	+ 0,4i	0	+ 0,8	+ 0,6i	0	+ 0,8	+ 0,9i
1	+ 0,48	+ 0,64i	1	+ 0,28	+ 0,96i	1	- 0,17	+ 1,44i
2	- 0,1792	+ 0,6144i	2	- 0,8432	+ 0,5376i	2	- 2,044	- 0,489i
3	- 0,3453	- 0,2202i	3	+ 0,4219	- 0,9066i	3	+ 3,941	+ 2,002i
4	+ 0,0708	+ 0,1521i	4	- 0,6439	- 0,7651i	4	+ 11,52	+ 15,78i
5	- 0,0181	+ 0,0215i	5	- 0,1708	+ 0,9853i	5	- 116,3	+ 363,7i
6	- 0,13·10 ⁻³	- 0,78·10 ⁻³ i	6	- 0,9416	- 0,3367i	6	- 0,188·10 ⁶	- 0,845·10 ⁵
7	- 0,59·10 ⁻⁶	+ 0,21·10 ⁻⁶ i	7	+ 0,7733	+ 0,6340i	7	+ 0,695·10 ¹⁰	+ 0,201·10 ¹¹

Die Anfangspunkte z_0 , deren Bahnen nach Unendlich „flüchten“, fasst man zur Menge E der „Ausbrecher“ (engl. *escapees*) zusammen. Für alle anderen Anfangspunkte bleibt die Bahn $R^n(z)$ beschränkt. Sie bilden die Menge P der „Gefangenen“ (engl. *prisoners*). Im vorliegenden Fall ist E das Äußere des Einheitskreises und P das Innere dieses Kreises einschließlich des Randes. Diese Definition lässt sich auf andere Abbildungen $z = R(z)$ verallgemeinern:

Sei $z = R(z)$ eine Abbildung $C \rightarrow C$ und deren Iteration $z_n = R^n(z_0)$ die Bahn eines Anfangspunktes $z_0 \in C$, so heißt

$$E = \left\{ z_0 \mid |z_n| \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty \right\}$$

die Menge der „Ausbrecher“ (*escapees*). Alle anderen Punkte der komplexen Ebene gehören zur Menge

$$P = C \setminus E$$

der „Gefangenen“ (*prisoners*).

Die Zweiteilung (engl. *dichotomy*) der komplexen Ebene führt dazu, dass es eine „Grenze“ zwischen den Gebieten E und P gibt. Im Fall der Abbildung $R(z) = z^2$ ist dies eine zusammenhängende Linie, nämlich der Einheitskreis $|z| = 1$. Alle Anfangspunkte mit $|z_0| = 1$ haben Bahnen, die weder gegen Null streben noch über alle Grenzen wachsen, sondern für immer auf dem Einheitskreis bleiben. Die Menge derartiger Grenzpunkte bezeichnet man nach dem französischen Mathematiker *G. JULIA* (1893 – 1978) als *Julia-Menge*.

Nur Anfangspunkte z_0 , die *genau* auf dieser Grenze liegen, haben Vorwärtsbahnen, die zur Grenzpunkt- oder *Julia-Menge* gehören. Alle anderen Anfangspunkte, auch solche mit nur *minimaler* Entfernung vom Einheitskreis, werden durch die Abbildung $R(z) = z^2$ in Bahnen gelenkt, die sich dem Nullpunkt oder dem unendlich fernen Punkt nähern. In dieser Hinsicht ist die *Julia-Menge* eine *abstoßende* Menge. Abbildung 2 zeigt die Vorwärtsbahnen dreier Anfangspunkte, von denen der erste nur wenig innerhalb des Einheitskreises, der zweite genau auf dem Einheitskreis und der dritte knapp außerhalb des Einheitskreises liegt. Diese Bahnen wurden mit dem (Java-) Programmpaket *VorwaertsBahn* berechnet.

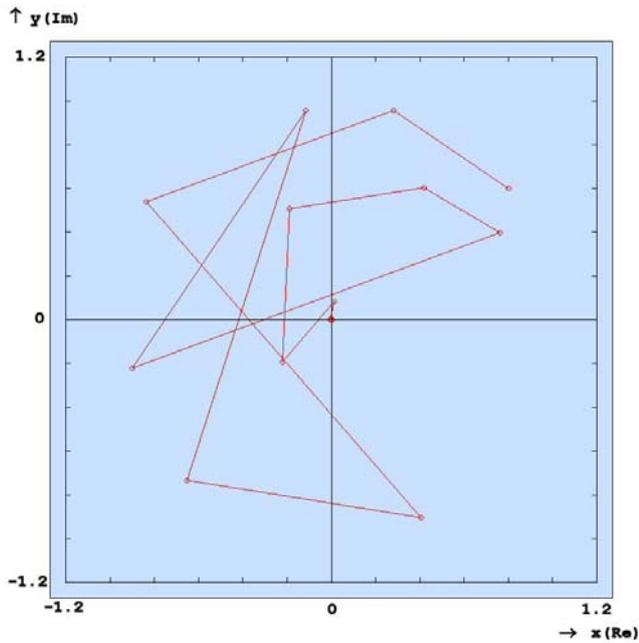
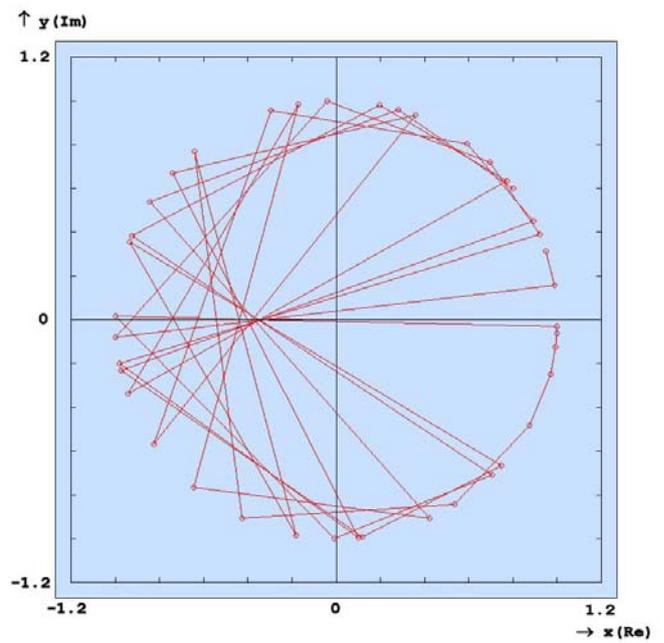
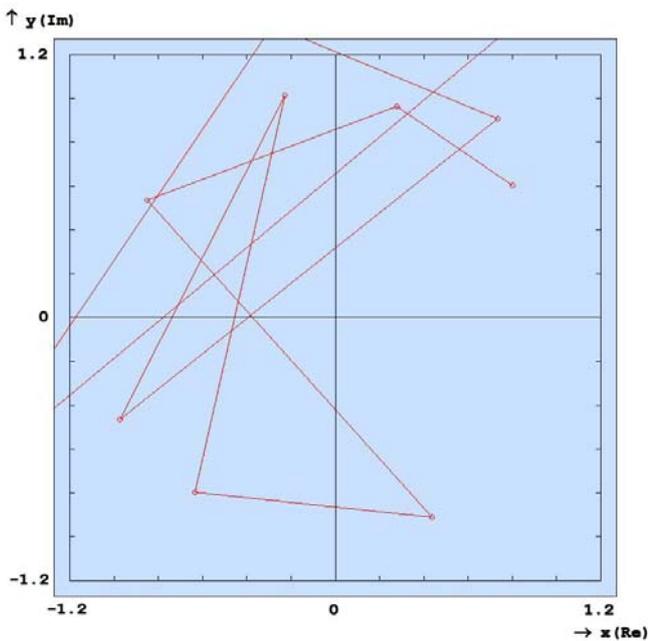
(a) $z_0 = 0,800 + 0,598 i$ (b) $z_0 = 0,800 + 0,600 i$ (c) $z_0 = 0,800 + 0,602 i$

Abb.2 Vorwärtsbahnen der Abbildung $R(z) = z^2$ in der komplexen Zahlenebene für drei verschiedene Anfangspunkte z_0 .

(a) $z_0 = 0,800+0,598i$, wenig innerhalb des Einheitskreises ($|z_0| = 0,998801$),

(b) $z_0 = 0,800+0,600i$, das heißt $|z_0| = 1,000000$, genau auf dem Einheitskreis,

(c) $z_0 = 0,800+0,602i$, knapp außerhalb des Einheitskreises ($|z_0| = 1,001201$).

Vorwärtsbahn (a) nähert sich dem Nullpunkt, Bahn (b) bleibt auf dem Einheitskreis, und Bahn (c) verschwindet im unendlich Fernen.

Das Programmpaket *VorwaertsBahn* berechnet auch die Vorwärtsbahnen für die weiter unten betrachtete Iteration der Abbildung $R_c(z) = z^2 + c$. Dabei ist c eine (konstante) komplexe Zahl, also $c \in \mathbb{C}$. Die *Julia-Mengen* für Abbildungen dieser Art sind keine „einfachen“ Gebilde wie der Einheitskreis im Fall $c = 0$.

3. Fixpunkt, Attraktor

Wählt man bei der Abbildung $R(z) = z^2$ den Anfangspunkt $z_0 = 1$, so ergibt die Iteration $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, usw. Das heißt, die Vorwärtsbahn B^+ enthält nur den Anfangspunkt z_0 . Ein derartiger Punkt heißt *Fixpunkt* der Iteration. Weitere Fixpunkte von $R(z) = z^2$ sind $z_0 = 0$ und $z_0 = \infty$.

Ein Punkt z_0 , der unter $R(z)$ in sich selbst abgebildet wird, d. h., für den gilt

$$R(z_0) = z_0 \quad \text{oder} \quad B^+(z_0) = \{z_0\},$$

heißt *Fixpunkt* der Abbildung R .

Es wurde schon erwähnt, dass die Punkte z_0 , die bei der Abbildung $R(z) = z^2$ zur Menge P der Gefangenen gehören, Vorwärtsbahnen besitzen, die sich an der Stelle $z = 0$ häufen. Die Stelle $z = 0$ ist andererseits ein Fixpunkt der Iteration. Fixpunkte können daher Häufungswerte von Vorwärtsbahnen sein. In diesem Fall nennt man sie *Attraktoren* (lat. *attrahere*, anziehen). Die Iteration der Abbildung $R(z) = z^2$ hat als weiteren Attraktor den Punkt $z = \infty$. Denn in diesem Punkt häufen sich die Vorwärtsbahnen der Punkte z_0 , die zur Menge E der Ausbrecher gehören. Die Menge der Anfangspunkte z_0 , deren Bahnen für eine gegebene Iteration zu ein- und demselben Attraktor führen, nennt man das *Einzugsgebiet* oder *Bassin* des Attraktors. Für $R(z) = z^2$ beispielsweise ist die Menge P (d. h. das Innere des Einheitskreises) das Einzugsgebiet des Attraktors $z = 0$, während die Menge E (d. h. das Gebiet außerhalb des Einheitskreises) das Einzugsgebiet des Attraktors $z = \infty$ ist (Abb. 3).

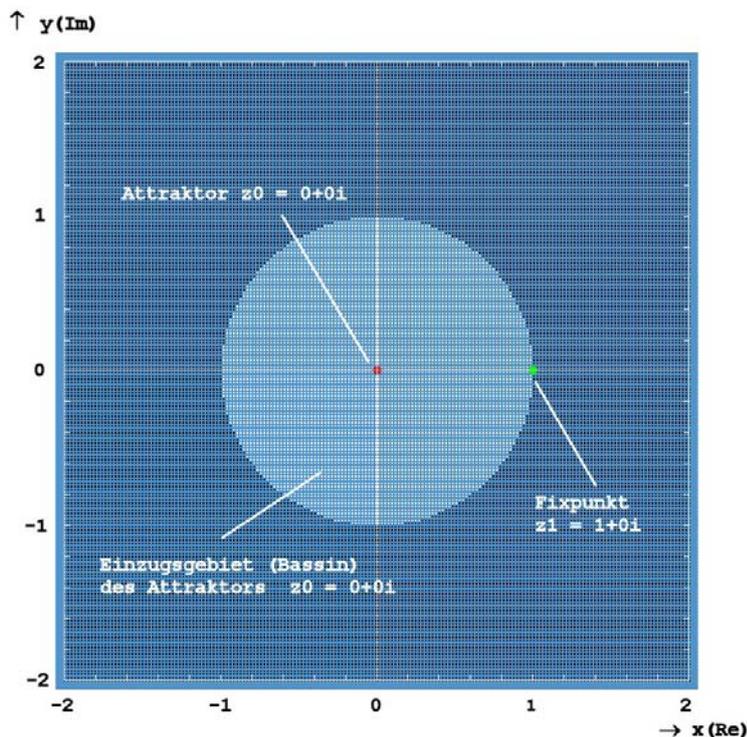


Abb. 3 Für jeden Rasterpunkt z_0 der komplexen Zahlenebene wurde die Vorwärtsbahn bei Iteration mit $R(z) = z^2$ berechnet. Sie mündet entweder in den Punkt $z_0 = 0+0i$ (rot) oder nähert sich dem unendlich fernen Punkt. Die Bahnen aller Anfangspunkte z_0 , die gegen $z_0 = 0+0i$ streben (weiße Punkte), bilden das Einzugsgebiet oder Bassin des Attraktors $z_0 = 0+0i$. Es ist das Innere des Einheitskreises. Die Bahnen aller anderen Anfangspunkte (schwarze Punkte) streben gegen den unendlich fernen Punkt, das heißt, gegen den Attraktor $z = \infty$. Der Punkt $z_1 = 1+0i$ (grün) ist ein Fixpunkt der Iteration, das heißt, es gilt $R(1+0i) = 1+0i$.

Der dritte Fixpunkt von $R(z) = z^2$, d. h. der Punkt $z = 1$, ist kein Attraktor. Er hat, wie alle anderen Punkte des Einheitskreises die Eigenschaft, Bahnen von Anfangspunkten, die in seiner Umgebung liegen, von sich weg zu stoßen (entweder in Richtung $z = 0$ oder in Richtung $z = \infty$). Er wird deshalb *abstoßender Fixpunkt* genannt ².

Sei Q eine Teilmenge von C (d. h. $Q \subseteq C$) und $z = R(z)$ eine Abbildung $C \rightarrow C$ mit dem Fixpunkt a .

Ist a gemeinsamer Häufungswert der Vorwärtsbahnen $B^+(z_0)$ aller Punkte $z_0 \in Q$, so heißt a ein *Attraktor* der Abbildung $z = R(z)$.

Die Menge Q nennt man das *Einzugsgebiet (Bassin)* des Attraktors a .

4. Julia-Menge

Im Fall $R(z) = z^2$ gibt es die beiden Attraktoren $z = 0$ und $z = \infty$, deren Einzugsgebiete an der gemeinsamen Grenzlinie $|z| = 1$, dem Einheitskreis, zusammentreffen. Verändert man die Rekursionsvorschrift zu

$$(15) \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

oder, in anderer Schreibweise, zu

$$R_c(z) = z^2 + c,$$

wobei c eine (konstante) komplexe Zahl ist, entsteht eine neue Situation. Ein vergleichsweise einfacher Fall ist $c = -1$. Tabelle 2 zeigt für dieses c die Bahn des Punktes $z_0 = -0,62 + 0i$.

Tabelle 2 Bahn des Punktes $z_0 = -0,62 + 0i$ bei der Iteration $R_{-1}(z) = z^2 - 1$.

n	z_n	n	z_n	n	z_n	n	z_n	n	z_n
1	-0,62	5	-0,61235	9	-0,60472	28	-0,02412	32	0,00000
2	-0,6156	6	-0,62503	29	-0,99942	33	-1,00000
3	-0,62104	7	-0,60933	30	-0,00116	34	0,00000
4	-0,61431	8	-0,62871	27	-0,98787	31	-1,00000	35	-1,00000

Der Punkt $z_0 = -0,62 + 0i$ gehört offenbar zur Menge P_c der „Gefangenen“, denn der Betrag von z_n ist beschränkt. Die Folge strebt aber nicht gegen einen einzigen Attraktor, sondern pendelt schließlich zwischen den beiden Häufungspunkten $z = 0$ und $z = -1$ hin- und her. Sie mündet ein, wie man sagt, in den *attraktiven Zyklus* $\gamma = \{0, -1\}$. Startet man mit einem dieser Punkte, erhält man den zweiten als Bild und umgekehrt. Das heißt, für die Abbildung $R_{-1}(z) = z^2 - 1$ gilt $R_{-1}(0) = -1$ und $R_{-1}(-1) = 0$. Es handelt sich um einen (attraktiven) Zyklus mit der *Periode 2*. Man kann zeigen, dass alle Anfangspunkte, die zur Menge P_c gehören, von diesem Zyklus angezogen werden.

Abbildung 4 zeigt das Einzugsgebiet dieses Attraktors bzw. attraktiven Zyklusses. Sein Rand ist keine „glatte“ geometrische Kurve wie der Einheitskreis im Fall $R(z) = z^2$, sondern eine Linie mit blasenartigen Buchten und Einschnürungen.

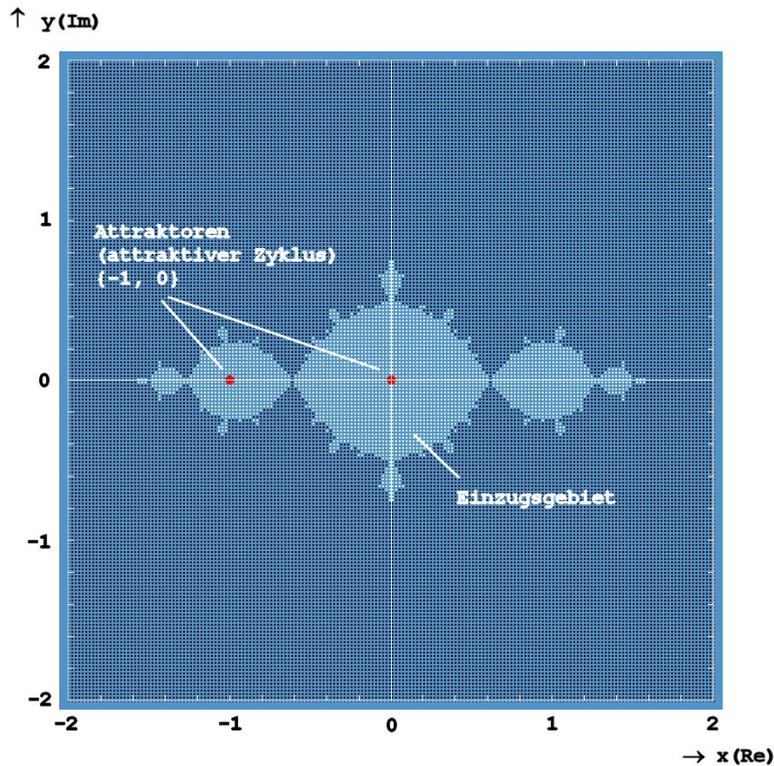


Abb. 4 Einzugsgebiet des Attraktors oder attraktiven Zyklusses $\{0+0i, -1+0i\}$ der Iteration $R_{-1}(z) = z^2 - 1$. Der Rand des Einzugsgebiets (des Bassins) ist blasenartig ausgebuchtet und eingeschnürt. Er wird auch bei noch so starker Vergrößerung nicht "glatt".

Generell gibt es für jede Iteration $R_c(z) = z^2 + c$ Attraktoren bzw. attraktive Zyklen. Ihre Eigenschaften hängen vom Wert des Parameters c ab. Man kann zeigen, dass einer der Attraktoren immer $z = \infty$ ist. Das heißt, für jedes $c \in \mathbb{C}$ gibt es die Menge E_c der „Ausbrecher“, die sich aus den Punkten z_0 zusammensetzt, deren Bahnen gegen den unendlich fernen Punkt gehen. Die *Julia-Menge* ist der Rand des Einzugsgebiets dieses Attraktors, d. h., der Rand der Menge E_c . Dieser Rand ist, abgesehen von Sonderfällen wie $c = 0$, eine Linie, die auch bei noch so starker Vergrößerung nicht „glatt“ wird, sondern seltsam gezackt und verästelt bleibt. Man nennt sie ein *Fraktal* ³.

Definition (*Julia-Menge*):

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Anfangspunkt in der komplexen Ebene, dessen Vorwärtsbahn durch

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (\text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } c \in \mathbb{C})$$

bzw. $R_c(z) = z^2 + c$ definiert ist, und E_c die Menge der „Ausbrecher“ für diesen Parameter c . Dann heißt der Rand ∂E_c von E_c die *Julia-Menge* J_c zur Abbildung $R_c(z) = z^2 + c$ mit dem Parameter c .

Das Programmpaket *AttraktorBassin* stellt die Lage der Attraktoren bzw. attraktiven Zyklen in der komplexen Ebene dar für $R_c(z) = z^2 + c$. Tabelle 3 zeigt numerische Werte für einige Parameter c .

Tabelle 3 Attraktoren bzw. attraktive Zyklen für eine Reihe von Parametern c . Der Attraktor $z = \infty$ ist nicht aufgeführt.

Nr.	c	Attraktoren bzw. attraktive Zyklen
1	0	{ 0 }
2	$-0,5 + 0,5i$	{ $-0,4087 + 0,2751i$ }
3	$-0,12375 + 0,56508i$	{ $-0,2250 + 0,3897i$ }
4	-1	{ 0 ; -1 }
5	$-0,12 + 0,74i$	{ $-0,6530 + 0,5625i$; $-0,010 + 0,053i$; $-0,1200 + 0,7400i$ }

5. Abtastmethode zur Darstellung von Julia-Mengen

Das Programm *AttrBassin.java* dient in erster Linie dazu, die Lage der Attraktoren bzw. attraktiven Zyklen darzustellen. Die Einzugsgebiete der Attraktoren werden wegen des groben Rasters nicht sehr genau wiedergegeben. Daher sind die Ränder von E_c , das heißt, die zugehörigen *Julia*-Mengen, in der Darstellung auf dem Bildschirm nicht gut zu erkennen.

Um die Strukturen des Randes von E_c genauer darzustellen, überzieht man das Gebiet der komplexen Ebene, in dem man diesen Rand vermutet, mit einem sehr dichten Raster von Punkten z_0 . Für die Iteration mit $R_c(z) = z^2 + c$ genügt es, den Ausschnitt $-2 < \text{Re}(z) < +2$, $-2 < \text{Im}(z) < +2$ zu betrachten. Jeder Punkt z_0 dieses Ausschnitts wird nun daraufhin untersucht, ob seine Vorwärtsbahn unter der Iteration mit $R_c(z) = z^2 + c$ gegen Unendlich läuft oder beschränkt bleibt. Eine Darstellung der *Julia*-Menge auf dem Computer-Bildschirm erhält man, indem man das Pixel, das dem Punkt z_0 entspricht, beispielsweise schwarz färbt, wenn die Bahn beschränkt bleibt, andernfalls weiß belässt. Auf diese Weise wird der Rand von E_c als Grenze zwischen schwarz und weiß gefärbtem Gebiet sichtbar. Das Verfahren wird in der Literatur *Abtastmethode* oder *boundary scanning* genannt.

Die Entscheidung darüber, ob eine Bahn gegen Unendlich läuft oder nicht, ist ein Problem. In der Praxis gibt man sich eine maximale Anzahl von Iterationen (*maxIter*) und eine obere Grenze (*schranke*) vor und beendet die Iteration, sobald die Anzahl der Iterationen größer als *maxIter* oder das Quadrat von z_n größer als *schranke* wird. Im ersten Fall nimmt man an, dass z_0 zur Menge P_c gehört, im zweiten Fall betrachtet man z_0 als Element der Menge E_c . Pixels, die den Punkten der Menge E_c entsprechen, werden oft nicht weiß gefärbt, sondern mit einer Farbe versehen, deren Sättigungsgrad oder Helligkeit sich aus der Anzahl Iterationen bis zum Abbruch ergibt. Das führt zu Schichtlinien gleicher „Fluchtgeschwindigkeit“ und eindrucksvollen Grafiken.

Algorithmus zur Darstellung von *Julia*-Mengen nach der Abtastmethode (*boundary scanning*):

Jeder Punkt z_0 des Ausschnitts $-2 < \text{Re}(z) < +2$, $-2 < \text{Im}(z) < +2$ der komplexen Zahlenebene wird daraufhin untersucht, ob seine Vorwärtsbahn unter der Iteration mit $R_c(z) = z^2 + c$ gegen Unendlich läuft oder beschränkt bleibt.

Bleibt z^2 bis zum Erreichen von *maxIter* Iterationen unter der oberen Grenze *schranke*, wird das Pixel, das dem Punkt z_0 entspricht, schwarz gefärbt. Andernfalls erhält das Pixel eine Farbe entsprechend der Anzahl der Iterationen bis zum Erreichen der oberen Grenze.

Das Gebiet der komplexen Ebene, das am Ende der Abtastschleife schwarz gefärbt ist, ist das Innere der *Julia*-Menge. Die *Julia*-Menge ist der Rand dieses Gebiets.

```

gibein c;           // Parameter c
gibein maxIter;    // maximale Anzahl der Iterationen
gibein schranke;   // obere Grenze für z*z

für alle Punkte z mit -2 < Re(z) < 2 und -2 < Im(z) < 2 tue
  n := 1; // zählt die Iterationen
  wiederhole
    z := z*z + c
    inc(n)
  bis (n > maxIter) oder (z*z > schranke);
  wenn n > maxIter
    dann färbe Punkt z schwarz // z ∈ P_c
    sonst färbe Punkt z entsprechend der Anzahl n
  ende tue.

```

Dieser Algorithmus ist im Paket *JuliaMenge* implementiert. Abbildung 5 zeigt die *Julia-Menge* für $c = -0.12 + 0.74i$. Das Innere der Menge ist schwarz gefärbt. Die *Julia-Menge* ist der Rand dieses schwarzen Gebiets. Dieser Rand ist ein *Fraktal*³, das heißt, eine Linie, die auch bei noch so starker Vergrößerung nicht „glatt“ wird. Der rote „Kragen“ befindet sich schon außerhalb des Randes. Das noch weiter außen liegende Gebiet wird abwechselnd hell- und dunkelblau getönt, je nachdem, ob die Anzahl der Iterationen bis zum Erreichen der vorgegebenen Schranke gerade oder ungerade ist.

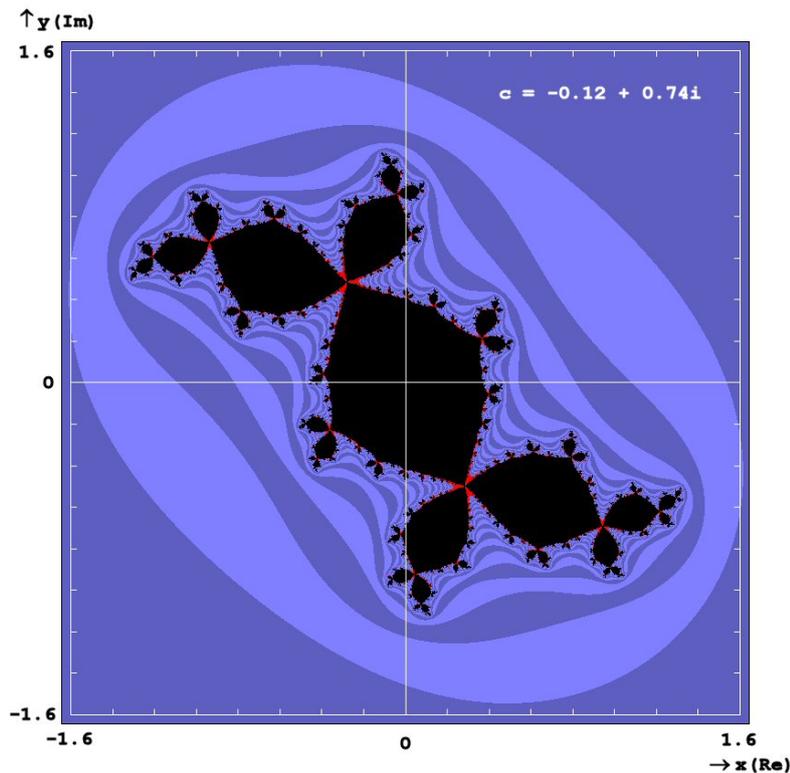


Abb. 5 Julia-Menge für die Iteration $R_c(z) = z^2 + c$ mit $c = -0.12 + 0.74i$. Die Julia-Menge ist der Rand des inneren, schwarz gefärbten Gebiets. Dieser Rand bleibt gezackt und verästelt, auch wenn er beliebig stark vergrößert wird: er ist ein Fraktal. Rot gefärbte Punkte gehören schon zum Einzugsgebiet des Attraktors $z = \infty$. Die "Höhenlinien" sind Linien gleicher Fluchtgeschwindigkeit bei der Bewegung auf $z = \infty$ zu.

6. Julia-Mengen durch inverse Iteration

Ein zweites Verfahren, *Julia*-Mengen darzustellen, ergibt sich aus dem Versuch, die Vorfahren bzw. Urbilder eines gegebenen Punktes z_0 der komplexen Ebene zu berechnen. Die Folge bzw. Menge der Punkte z , aus denen z_0 durch wiederholte Anwendung der Abbildung R_c entstanden sein kann, heißt die *Rückwärtsbahn* B^- (engl. *inverse orbit*) von z_0 unter R_c .

Sei $z = R(z)$ eine Abbildung $C \rightarrow C$ und $z_0 \in C$, so heißt die Menge

$$B^-(z_0) = \left\{ z \mid R_c^k(z) = z_0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

die *Rückwärtsbahn* (engl. *inverse orbit*) des Punktes z_0 unter der Abbildung $R(z)$.

In der Praxis gibt es ein Problem, da die Umkehrabbildung zu R_c nicht eindeutig ist. Schreibt man die Abbildung R_c : $w = z^2 + c$, dann ist

$$\begin{aligned} z^2 &= w - c \\ \Leftrightarrow z &= +\sqrt{w-c} \vee z = -\sqrt{w-c} . \end{aligned}$$

Das heißt, zu einem gegebenen Bild w der Abbildung R_c gibt es zwei Urbilder. Sie sind von gleichem Betrag, unterscheiden sich aber im Vorzeichen. Da nicht über alle möglichen Vorfahren Buch geführt werden kann – dazu würde die Kapazität des Rechners nicht ausreichen –, wird bei jedem Rückwärtsschritt eines der Urbilder zufallsgesteuert ausgewählt.

Man gelangt auf diese Weise zumindest zu einem Teil der Quellen des Punktes z_0 . Erstaunlich ist, dass sich diese Quellen in der Nähe des Randes von E_c , d. h. in der Nähe von Punkten der *Julia*-Menge häufen. In der Tat gilt:

Die Rückwärtsbahn jedes Punktes z_0 der komplexen Ebene enthält Punkte, die beliebig nahe an Punkte der *Julia*-Menge herankommen.

Umgekehrt kann man offenbar jeden (beliebig vorgegebenen) Punkt w der komplexen Ebene von irgendeinem Punkt z_0 in der Nähe der *Julia*-Menge durch Vorwärtsiteration erreichen. Man kann sogar die noch stärkere Aussage beweisen:

Ist z ein Element der *Julia*-Menge J_c für die Abbildung R_c , dann gibt es zu jeder noch so kleinen Umgebung $U_\varepsilon(z)$ von z eine Iterierte R_c^n derart, dass ein beliebig vorgegebener Punkt $w \in C$ das Bild unter R_c eines Punktes z_0 aus dieser Umgebung ist. Das heißt, es existiert ein n mit der Eigenschaft

$$w = R_c^n(z_0) \text{ für } z_0 \in U_\varepsilon(z)$$

Grob gesprochen, tendieren die Iterierten R_c^n dazu, beliebig kleine Umgebungen der *Julia*-Menge über die ganze komplexe Ebene zu „verschmieren“. In diesem Sinn ist J_c eine „abstoßende“ Menge.

Algorithmus zur Darstellung der *Julia*-Menge durch inverse Iteration:

Für eine große Zahl zufällig ausgewählter Punkte z_0 der komplexen Zahlenebene werden die *Rückwärtsbahnen* berechnet, die sich durch Umkehrung der Abbildung $R_c(z) = z^2 + c$ ergeben. Die Position des Bahnpunktes nach ausreichend vielen (Rückwärts-)Iterationen wird durch Weißfärbung des zugehörigen Pixels markiert.

```

n := 10000; // Anzahl der Rückwärts-Iterationen
z := z0; // ein zufällig ausgewählter Anfangswert
gib ein c;
wiederhole n mal
  wenn random(1) < 0.5 // zufällige Auswahl einer der beiden
    dann z := sqrt(z - c) // Lösungen von z2 = w - c
    sonst z := -sqrt(z - c);
  färbe Punkt z weiß // z liegt schließlich in der Nähe von Jc
ende wiederhole.

```

Dieser Algorithmus ist in dem Paket *JuliaMengeIIM* implementiert. Die *Julia*-Menge, die in Abbildung 6 dargestellt ist, wurde mit diesem Programm berechnet. Es zeigt sich, dass die Rückwärtsbahnen der zufällig ausgewählten Punkte z_0 nicht an allen Stellen des Randes mit der gleichen Wahrscheinlichkeit enden. In den „Einschnürungspunkten“ beispielsweise sind keine Pixel weiß gefärbt.

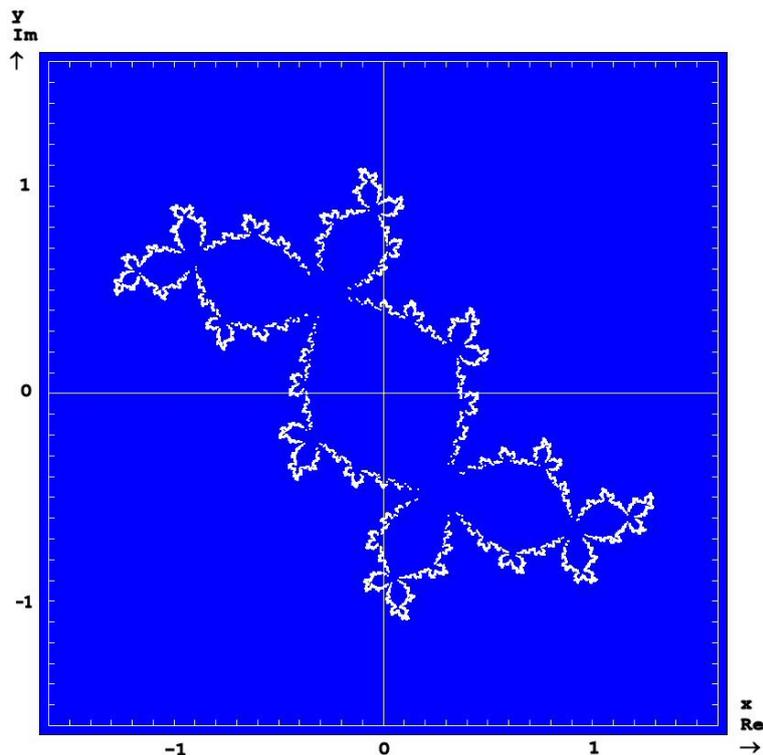


Abb. 6 Für viele zufällig ausgewählte Punkte z_0 der komplexen Zahlenebene werden die Rückwärtsbahnen berechnet, die sich durch Umkehrung der Abbildung $R_c(z) = z^2 + c$ ergeben - hier für $c = -0.12 + 0.74i$. Die Position des Bahnpunktes nach 100 (Rückwärts-) Iterationen wird durch Weißfärbung des zugehörigen Pixels markiert. Alle diese durch Rückwärtsiteration berechneten Bahnpunkte befinden sich in der Nähe der Julia-Menge.

7. Mandelbrot-Menge

Julia-Mengen können sehr unterschiedliche „Formen“ haben. Für $c = 0$ beispielsweise ist J der Einheitskreis, $c = -2$ ergibt für J das Intervall $[-2; 2]$ der reellen Achse. Darüber hinaus findet man deformierte „Kreise“ (mit gezacktem Rand), z. B. für $c = -0,12375 + 0,56508i$, außerdem deformierte, gezackte „Kreise“ mit Einschnürungen (beispielsweise für $c = -1$) und deformierte „Intervalle“, d. h. gezackte Linien ohne Inneres ($c = i$). Eine gänzlich andere Art von *Julia*-Mengen entdeckt man, wenn man die Darstellungen zu $c = -0,18 + 0,67i$ und $c = 0,11 + 0,67i$ vergleicht

(Abb. 7). Die *Julia*-Menge, die zum erstgenannten Parameter gehört, ist eine zusammenhängende Linie, während die andere in eine Wolke von „Staub“ zerfällt. Sie ist *total unzusammenhängend*, d.h. eine *Cantor*-Menge.

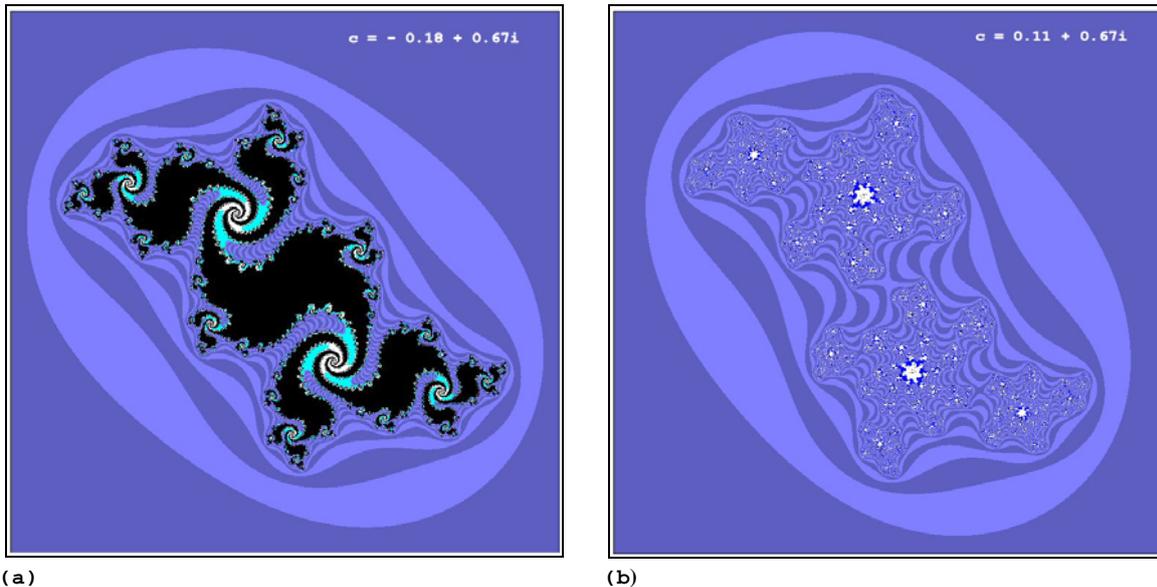


Abb. 7 Zwei *Julia*-Mengen für unterschiedliche Werte des Parameters c .

- (a) Zusammenhängende *Julia*-Menge für $c = -0,18 + 0,67i$. Beachte, dass die *Julia*-Menge der Rand des schwarz gefärbten Gebiets ist.
- (b) Nicht zusammenhängende *Julia*-Menge für $c = 0,11 + 0,67i$. Eine nicht-zusammenhängende *Julia*-Menge zerfällt in "Staubkörner", die sich computergraphisch kaum darstellen lassen. Hier sind die Staubkörner von weißen "Kragen" umgeben, so dass man ihre Lage erahnen kann.

Offenbar entscheidet auch hier der Wert des Parameters c darüber, welcher der beiden Fälle vorliegt. Es fragt sich daher, für welche Werte von c sich zusammenhängende *Julia*-Mengen J_c ergeben und wie die Menge dieser c -Werte in der komplexen Ebene aussieht. Die Menge der (komplexen) Zahlen c , für die J_c zusammenhängend ist, wird nach *B. MANDELBROT* benannt, der sie entdeckte und zum ersten Mal computergrafisch darstellte⁴.

Die Menge aller Zahlen $c \in \mathbb{C}$, für die die zugehörige *Julia*-Menge J_c zusammenhängend ist, heißt *Mandelbrot*-Menge M . Das heißt, es gilt

$$M = \{ c \in \mathbb{C} \mid J_c \text{ ist zusammenhängend} \}.$$

Die Darstellung der *Mandelbrot*-Menge (zum Beispiel auf dem Computer-Bildschirm) erfordert daher für jedes c (aus dem interessierenden Gebiet der komplexen c -Ebene) die Prüfung, ob die zugehörige *Julia*-Menge J_c zusammenhängend oder eine *Cantor*-Staubwolke ist. Die Entscheidung trifft man anhand eines Kriteriums, das der folgende Satz von *Julia* und *Fatou* (*P. FATOU*, französischer Mathematiker, 1878 – 1929) bereitstellt.

Fundamentaler Satz der *Mandelbrot*-Menge:

Die *Julia*-Menge J_c zum Parameter c ist dann und nur dann *zusammenhängend*, wenn die Vorwärtsbahn $B_c^+(0)$ des Punktes $z_0 = 0$ beschränkt ist. Genau dann gehört c zur *Mandelbrot*-menge M :

$$c \in M \Leftrightarrow B_c^+(0) = \{ 0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \} \text{ ist beschränkt.}$$

8. Computergrafische Darstellung der Mandelbrot-Menge

In der Praxis geht man bei der Entscheidung, ob $B_c^+(0)$ beschränkt ist oder nicht, vor wie im Fall der Abtastmethode bei der Darstellung der *Julia*-Mengen. Man gibt sich wiederum eine maximale Anzahl von Iterationen (*maxIter*) und eine obere Grenze (*schranke*) für das Quadrat z^2 des Bahnpunktes vor. Ist z^2 nach der vorgegebenen Maximalzahl von Iterationen kleiner als die Schranke, nimmt man an, dass der gerade untersuchte Wert von c zur *Mandelbrot*-Menge M gehört. Andernfalls rechnet man ihn zum Komplement $C \setminus M$. In diesem Fall ist die Anzahl n der Iterationen ein Maß für den Reziprokwert der „Fluchtgeschwindigkeit“, mit der die Bahn $B_c^+(0)$ gegen Unendlich strebt. Man färbt das c entsprechende Pixel, ähnlich wie im Fall der *Julia*-Menge, schwarz, falls c ein Element der *Mandelbrot*-Menge ist, ansonsten wählt man die Farbe entsprechend der Anzahl n der Iterationen bis zum Erreichen der Schranke für z^2 .

Algorithmus zur Erzeugung der Mandelbrot-Menge für $R_c(z) = z^2 + c$ nach der Abtastmethode:

Für alle Werte c im Bereich $-2.5 < \text{Re}(c) < 0.5$ und $-1.25 < \text{Im}(c) < 1.25$ wird, ausgehend von $z = 0$, die Rekursionsformel $R_c(z) = z^2 + c$ bis zu einer maximalen Anzahl von Iterationen (*maxIter*) angewandt. Ist z^2 danach kleiner als die vorgegebene Grenze *schranke*, wird der zu c gehörende Punkt $(\text{Re}(c), \text{Im}(c))$ der komplexen Zahlenebene schwarz gefärbt. Andernfalls wählt man eine Farbe, die der Anzahl der Iterationen entspricht, die bis zum Erreichen von *schranke* benötigt wurden.

Das nach Ende der Rechnung schwarz gefärbte Gebiet ist die *Mandelbrot*-Menge.

```

gibein maxIter; // maximale Anzahl der Iterationen
gibein schranke; // obere Grenze für z*z
für alle Werte c mit -2.5 < Re(c) < 0.5
                    und -1.25 < Im(c) < 1.25
tue
  n := 1; // zählt die Iterationen
  z := 0; // Anfangspunkt z0 = 0 + 0i
  wiederhole
    z := z*z + c
    inc(n)
  bis (n > maxIter) oder (z*z > schranke);
  wenn n > maxIter
    dann färbe Punkt c schwarz // c ∈ M
    sonst färbe Punkt c entsprechend der Anzahl n der Iterationen
ende tue.

```

Der Algorithmus wird, in Anlehnung an das gleichartige Verfahren zur Darstellung von *Julia*-Mengen, ebenfalls *Abtastmethode* (engl. *boundary scanning*) genannt. Er ist in dem Programmpaket *MandelbrotMengeBSM* codiert.

Abbildung 8 zeigt die *Mandelbrot*-Menge, die das Programm auf dem Bildschirm darstellt. Man beachte, dass der Rand von M auch bei Vergrößerung nicht „glatter“ wird. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für ein *Fraktal*. Die Verästelung des Randes wird dadurch hervorgehoben, dass Gebiete gleicher Fluchtgeschwindigkeit im Gebiet außerhalb von M entsprechend n eingefärbt werden ($n =$ Anzahl der Iterationen bis zum Erreichen der Schranke für z^2). Ein Beispiel dafür zeigt Abb. 9, weitere findet man in der Literatur^{5,6}.

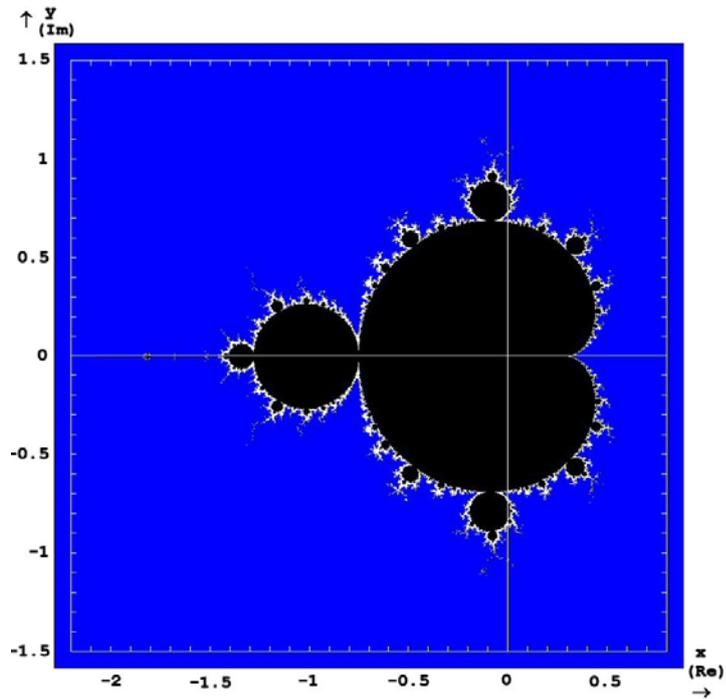


Abb. 8 Mandelbrot-Menge in der komplexen Zahlenebene (schwarz gefärbtes Gebiet). Die Mandelbrotmenge ist die Menge aller Zahlen c , für die die Julia-Menge J_c zusammenhängend ist. Der Rand dieser Menge ist ein Fraktal, das heißt, eine nicht unterbrochene Linie, die auch bei beliebig hoher Vergrößerung nicht "glatt" wird.

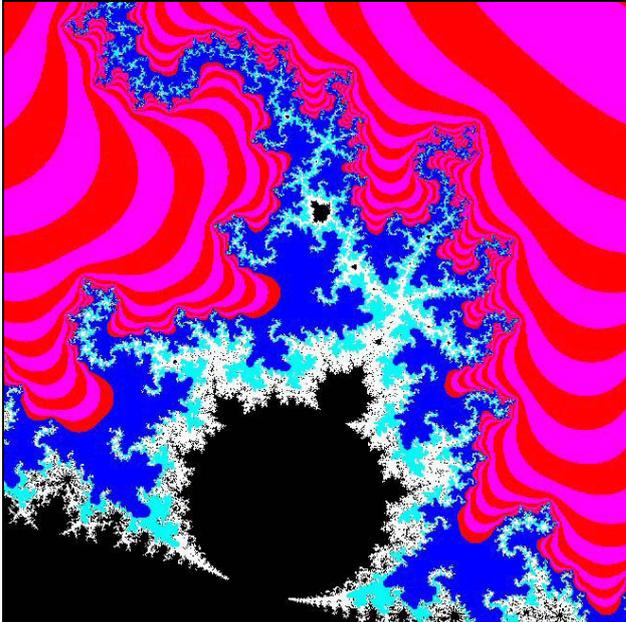


Abb. 9 Ausschnitt aus dem Rand der Mandelbrotmenge. Der Ausschnitt stellt das Gebiet der komplexen Zahlenebene dar im Intervall $-0.950000 \leq \text{Re}(c) \leq -0.883333$ und $-0.300000 \leq \text{Im}(c) \leq -0.233333$.

Anmerkungen und Literatur

¹ Die Bezeichnung *Vorwärtsbahn* und alle weiteren „Fachausdrücke“ sind entnommen dem Buch *Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe: Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, New York, 1992.

² Es gilt allerdings $R(-1) = (-1)^2 = 1$. Iterationen, die von anderen Anfangspunkten ausgehen, landen nicht bei $z = 1$. Das „Attraktionsbassin“ des Fixpunktes $z = 1$ ist somit nur ein einziger Punkt der komplexen Ebene, nämlich $z = -1$.

Eine ausführliche und vollständige Klassifikation der Fixpunkte einer Juliamenge bieten die unter ¹) und ⁵) genannten Bücher.

³ Eine umfassende Einführung in das Gebiet der Fraktale ist das unter ¹) genannte Buch *Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe: Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, New York, 1992. Es besteht aus zwei Bänden, Band 1 mit dem Untertitel *Introduction to Fractals and Chaos*, Band 2 mit *Complex Systems and Mandelbrot Set*. Zum Selbststudium (Schulniveau) sehr gut geeignet, mit Computerprogrammen – allerdings in der heute nicht mehr gängigen Sprache *BASIC*.

Eines der ersten Bücher über Fraktale ist *Benoit B. Mandelbrot: Fractals – Form, Chance, and Dimension*, Freeman, San Francisco, 1977. Mathematisch anspruchsvoller als das Buch *Fractals for the Classroom*.

⁴ Die Arbeit, in der *Mandelbrot* zum ersten Mal eine graphische Darstellung „seiner“ Menge veröffentlichte, ist *Benoit B. Mandelbrot: Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z* , *Annals New York Academy of Sciences* 357 (1980), 249 – 259.

Ein Rückblick auf die Geschichte der Entdeckung ist *Mandelbrots* Artikel *Fractals and the Rebirth of Iteration Theory* in dem unter ⁵) genannten Buch *Heinz-Otto Peitgen und Peter H. Richter: The Beauty of Fractals – Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986, Seiten 151 – 160.

In seinem Buch *Benoit B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1977, stellt *Mandelbrot* seine Menge dar auf Seite 188.

⁵ *Heinz-Otto Peitgen und Peter H. Richter: The Beauty of Fractals – Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Toronto, 1986. Dieses Buch enthält viele *farbige* Abbildungen von Juliamengen, von der Mandelbrotmenge und von Ausschnitten derselben – nicht nur solche, die zur Iteration mit $R(z) = z^2 + c$ gehören. Auch die Mathematik der Juliamengen wird ausführlich behandelt. Darüber hinaus gibt es einen Beitrag von *Mandelbrot* zur historischen Entwicklung der Theorie der Fraktale (siehe oben) und einen Artikel von *A. Douady* über Julia-Mengen und die Mandelbrotmenge.

⁶ *Heinz-Otto Peitgen und Dietmar Saupe (Editors): The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 1988. Beiträge verschiedener Autoren, u. a. auch über die Erzeugung fraktaler Landschaften. Zu fast allen Problemen werden (imparativ formulierte) Algorithmen angeboten. Sie lassen sich ohne großen Aufwand in gängige imparative Programmiersprachen übertragen.

Anhang

Verzeichnis der benutzten Computer-Programme

1 **ForwOrb.java**

Berechnet die Forwärtsbahn eines Punktes z_0 der komplexen Ebene bei Iteration der Abbildung $R(z) = z^2 + c$. Eingabe: $z_0 = (x_0, y_0)$, Ausgabe: Bahnpunkt nach jedem Iterationsschritt. Die Bahn wird außerdem in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt. Beispiele: Abb. 2.

2 **AttrBassin.java**

Ermittelt das Einzugsgebiet (Bassin) der Attraktoren bzw. der attraktiven Zyklen der Abbildung $R(z) = z^2 + c$. Eingabe: c_x, c_y . Das Bassin wird auf dem Bildschirm dargestellt. Beispiele: Abb. 3 und Abb. 4.

3 **JuliaBSM.java**

Ermittelt die Julia-Menge der Abbildung $R(z) = z^2 + c$ nach der Abtastmethode (Algorithmus siehe Text) und stellt sie auf dem Bildschirm dar. Eingabe: c_x, c_y . Beispiele: Abb. 5 und Abb. 7.

4 **JuliaIIM.java**

Bestimmt die Julia-Menge der Abbildung $R(z) = z^2 + c$ nach der Methode der inversen Iteration (Algorithmus siehe Text) und stellt sie auf dem Bildschirm dar. Eingabe: c_x, c_y . Beispiel: Abb. 6.

5 **MandelbrotBSM.java**

Stellt die Mandelbrotmenge der Abbildung $R(z) = z^2 + c$ auf dem Bildschirm dar. Arbeitet nach der Abtastmethode (Algorithmus siehe Text). Eingabe: Grenzen des Gebiets der komplexen Ebene, das dargestellt werden soll. Beispiele: Abb. 8 und Abb. 9.