Fibonacci-Rechtecke

Nimm die Folge (F_n) = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,… (n = 0, 1, 2 , 3 …) der *Fibonacci-Zahlen*[1] und bilde die Produkte benachbarter Zahlen 0 ·1 = 0, 1 ·1 = 1, 1 ·2 = 2, 2 ·3 = 6, 3 ·5 = 15, 5 · 8 = 40, usw. Die Produkte 0, 1, 2, 6, 15, 40, usw. sind die Flächeninhalte der so genannten *Fibonacci-Rechtecke*[2] mit den Seitenlängen (0,1), (1,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,8), …. Das n-te Rechteck hat den Flächeninhalt F_nF_{n+1}. Addiere die ersten n Flächeninhalte. Dann entsteht die Zahlenfolge (a_n) = 0, 1, 3, 9, 24, 64, 168, 441, 1155, 3025, …, die *Summe der Fläche der ersten n Fibonacci-Recktecke*[3].

Es fällt auf, dass jede zweite Zahl der Folge (a_n) ein Quadrat ist: $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $64 = 8^2$, $441 = 21^2$ und $3025 = 55^2$, und zwar das Quadrat der *Fibonacci*-Zahl mit geradem Index 2, 4, 6, usw., also $1^2 = F_2^{\,2}$, $3^2 = F_4^{\,2}$, $8^2 = F_6^{\,2}$. Offenbar gilt

(1) $\quad a_{2n-1} = F_{2n}^2 \quad (n = 1,2,3,...)$.

In Abbildung 1 sind die *Fibonacci*-Rechtecke spiralförmig aneinander gelegt. Man erkennt sofort, dass jedes zweite Rechteck die bisher angelegten zu einem Quadrat ergänzt.

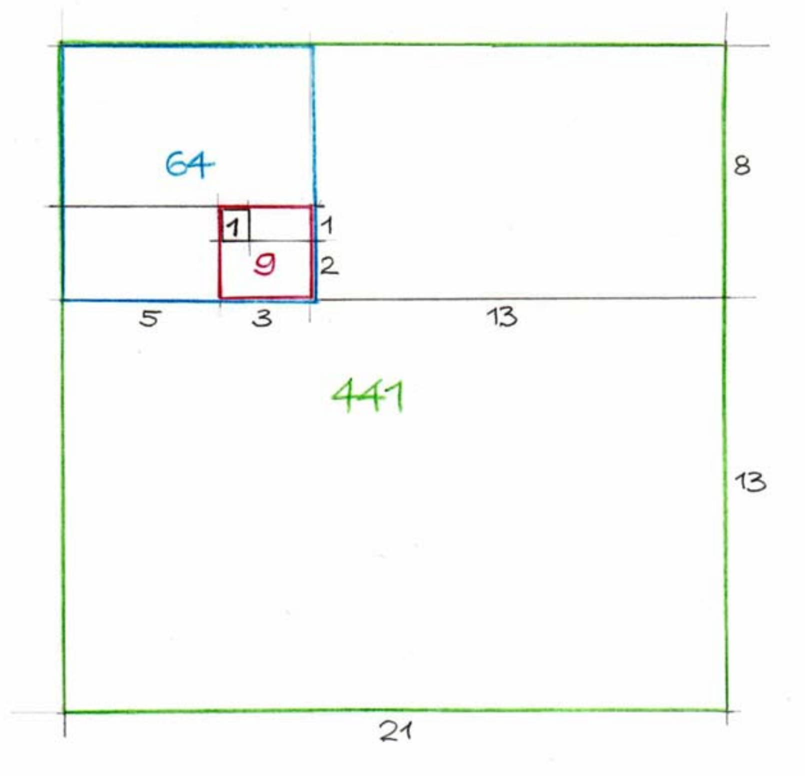

Abbildung 1 "Spirale" der Fibonacci-Rechtecke

Die Folgeglieder a_{2n+1} (n = 1, 2, 3, …) mit ungeradem Index lassen sich rekursiv berechnen gemäß

(2) $\quad a_{2n+1} = a_{2n-1} + F_{2n}F_{2n+1} + F_{2n+1}F_{2n+2} \quad (n = 1,2,3,...)$.

Dabei sind

$$F_{2n}F_{2n+1} \text{ und } F_{2n+1}F_{2n+2}$$

die Flächeninhalte der beiden zu a_{2n-1} zu addierenden Rechtecke. Beispiel: $a_5 = a_3 + F_4F_5 + F_5F_6 = 9 + 3{\cdot}5 + 5{\cdot}8 = 64$. Durch vollständige Induktion zeigt man, dass die Addition der beiden Rechtecke das nachfolgende Quadrat ergibt: Gleichung (1) ergibt für n = 1

$$a_1 = F_2^2 = 1.$$

Angenommen,

$$a_{2n-1} = F_{2n}^2$$

sei für ein bestimmtes *n* bewiesen. Dann folgt nach Gl. (2)

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= a_{2n-1} + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1} F_{2n+2} \\
&= F_{2n}^2 + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1}(F_{2n} + F_{2n+1}) \\
&= F_{2n}^2 + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1} F_{2n} + F_{2n+1}^2 \\
&= F_{2n}^2 + 2F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1}^2 \\
&= (F_{2n} + F_{2n+1})^2 \\
&= F_{2n+2}^2
\end{aligned}$$

qed. Dabei wurde von $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ (n = 1, 2, 3, ...)$ Gebrauch gemacht.

---

[1] On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (A000045), https://oeis.org (A000045)
[2] a. a. O., (A001654)
[3] a. a. O., (A064831)