Der Goldene Schnitt[1] – zu sehen am ausbalancierten *L*

Wir starten mit einem quadratischen Stück Karton. Aus diesem Quadrat soll ein kleineres Quadrat an der rechten oberen Ecke herausgeschnitten werden, dessen Seiten parallel zu denen des größeren Quadrats sind. Übrig bleibt ein *L*-förmiges Kartongebilde mit gleich langen Schenkeln. Dieses soll am Schnittpunkt der Schenkel-Innenkanten so aufgehängt werden, dass seine Schenkel in der Waagerechten sind. Frage: Wie groß muss die Kantenlänge des herausgeschnittenen Quadrats sein, bezogen auf die Kantenlänge des ursprünglichen Quadrats, damit dies der Fall ist?

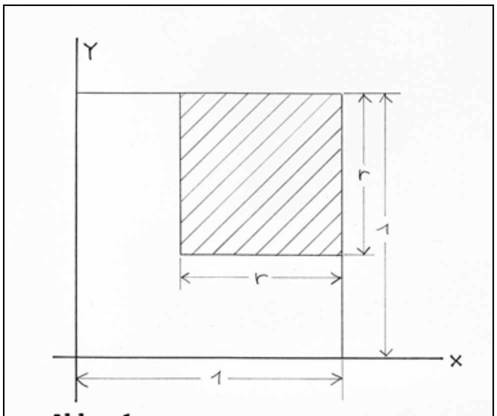

Abb. 1

Man sieht sofort ein, dass der Aufhängepunkt der Schwerpunkt der *L*-förmigen Restfläche sein muss. Wir müssen daher die Lage dieses Schwerpunkts berechnen, und zwar in Abhängigkeit von der Kantenlänge des herausgeschnittenen Quadrats.

Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir die Kantenlänge des ursprünglichen Quadrats gleich 1 (Eins). Die Kantenlänge des herausgeschnittenen Quadrats sei *r* genannt. Es ist nun sinnvoll, ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem zugrunde zu legen, dessen Ursprung mit der linken unteren Ecke des ursprünglichen Quadrats zusammen fällt, und dessen Achsen sich in Richtung der unteren Kante (*x*-Achse) bzw. linken Kante (*y*-Achse) dieses Quadrats erstrecken (Abb. 1).

Die Schwerpunktskoordinate x_S eines aus Teilflächen zusammengesetzten Körpers ist dann gegeben durch

$$(1) \qquad x_S = \frac{\sum_i (x_S)_i A_i}{\sum_i A_i} \; .$$

Dabei ist $(x_S)_i$ die Schwerpunkskoordinate und A_i der Flächeninhalt der *i*-ten Teilfläche. Die Summation geht über alle Teilflächen. Herausgeschnittene Teilflächen müssen dabei in beiden Summen (d.h. im Zähler und im Nenner des Bruchs) negativ gezählt werden. Für die Schwerpunktskoordinate y_S gilt eine entsprechende Formel (ersetze *x* durch *y*).

In unserem Fall ergibt sich

$$(2) \qquad x_S = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1^2 - (1 - \frac{r}{2})\cdot r^2}{1^2 - r^2} \; .$$

Der Schnittpunkt der Schenkel-Innenkanten hat die *x*-Koordinate $1 - r$. Wenn dort der Schwerpunkt liegen soll, muss also gelten $x_S = 1 - r$. Mit Hilfe von Gl. (2) ergibt sich daraus die Forderung

$$(3) \qquad \frac{\frac{1}{2}\cdot 1^2 - (1 - \frac{r}{2})\cdot r^2}{1^2 - r^2} = 1 - r \; .$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen zu

(4) $\quad r^3 - 2r + 1 = 0\,.$

Aus Symmetriegründen ergibt sich für die *y*-Koordinate des Schwerpunkts dieselbe Gleichung.

Durch Einsetzen sieht man sofort, dass $r = 1$ eine Lösung von Gl. (4) ist. Dividiert man die linke Seite von Gl. (4) durch den zugehörigen Linearfaktor $(r - 1)$, erhält man als Quotient den Term $(r^2 + r - 1)$. Gleichung (4) lässt sich daher auch schreiben

(5) $\quad (r^2 + r - 1)(r - 1) = 0$

und die weiteren Lösungen von Gl. (4) sind daher gegeben durch

(6) $\quad r^2 + r - 1 = 0\,.$

Diese sind (die *pq*-Formel aus der Schule hilft hier weiter)

(7) $$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Das Minuszeichen vor der Wurzel führt zu einem negativen *r*. Deshalb bleiben als Lösungen

$$r = 1 \quad \textit{und} \quad r = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}61803398\ldots\,.$$

Dieselbe Rechnung trifft zu für die *y*-Koordinate. D. h., der Schnittpunkt der Schenkel-Innenkanten des „*L*“ liegt entweder bei $(x, y) = (1, 1)$ oder bei $(x, y) = (0{,}618\ldots, 0{,}618\ldots)$.

Die erste Lösung (1, 1) entspricht einem „*L*“ mit Flächeninhalt Null, sie ist physikalisch nicht zu realisieren. Bei der zweiten hingegen liegt der Schwerpunkt innerhalb der Fläche des ursprünglichen Quadrats, und zwar im „Goldenen Schnitt“ der Quadratseiten. Abb. 2 zeigt ein solches ausbalanciertes *L*.

[1] Alles über den Goldenen Schnitt steht z. B. bei *A. Beutelspacher* und *B. Petri*: **Der Goldene Schnitt**, *BI*-Verlag, Mannheim 1989